ÚLOHA LIN PROGRAMOVÁNÍ V ROVINĚ (1)

Maximalizovat $f(x,y) = c_1 x + c_2 y$

na podmínce $a_1 x + b_1 y \leq d_1$

$$\vdots$$

$$a_n x + b_n y \leq d_n$$

Maximalizovat f na průniku poloroviny $\underline{m_1 \cap m_2} \cap h_1 \cap \dots \cap h_n$

f je omezená na $m_1 \cap m_2$.

$C_0 = m_1 \cap m_2$

$C_1 = m_1 \cap m_2 \cap h_1$

$C_i = m_1 \cap m_2 \cap h_1 \cap \dots \cap h_i$

2

v_i bod v C_i, pro který f nabývá svého maxima a současně

v_i je minimální v lexikografickém uspořádání

v_0 = průnik přímek ohraničujících $m_1 \wedge m_2$

Induktivně počítáme v_i z v_{i-1}

(1) $v_{i-1} \in h_i \implies v_i = v_{i-1}$

(2) $v_{i-1} \notin h_i$ spočítáme $v_i \in l_i$ (hraniční přímka poloroviny h_i)
pomocí úlohy 1-dim. lin. programování

Ukážeme si jak

3

Přímka l_1 má rovnici

$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

Předp. $\beta \neq 0$.

$$y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}$$

$$f(x,y) = c_1 x + c_2 y = c_1 x + \frac{c_2\gamma - c_2 \alpha x}{\beta} = \left(c_1 - \frac{c_2 \alpha}{\beta}\right) x + \frac{c_2 \gamma}{\beta}$$

$f(x,y)$ nabývá svého maxima na l_1 právě když nabývá svého maxima na $\mathbb{R}$ funkce $g(x) = \left(c_1 - \frac{c_2\alpha}{\beta}\right) x$

4

$$a_j x + b_j y \le d_j \qquad j = \cancel{0}, 1, \ldots, i-1$$

$$a_j x + b_j \frac{\gamma - \alpha x}{\beta} \le d_j$$

$$\left(a_j - \frac{b_j \alpha}{\beta}\right) x \le d_j - \frac{b_j \gamma}{\beta} \qquad j = 1, 2, \ldots, i-1$$

Toto je úloha 1 dim. lin. programování. Její řešení nalezneme v čase $O(i)$

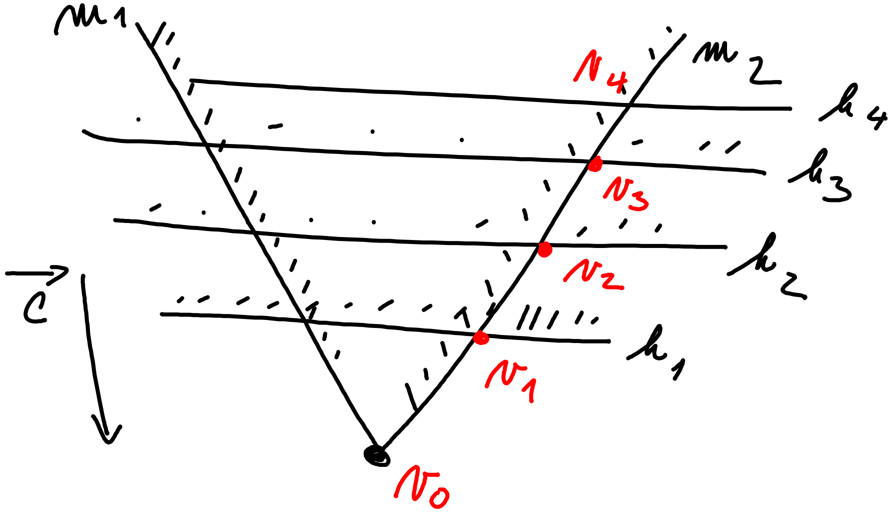
Tímto způsobem dostaneme z v_{i-1} bod v_i

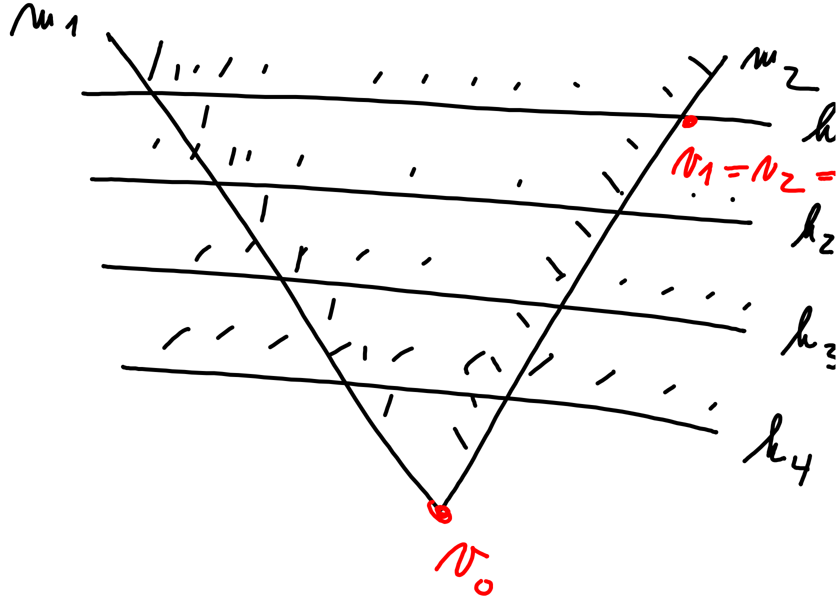
Nejhorší možný čas pro výpočet v_n je tedy

$$O(1) + O(2) + \ldots + O(n) = O(1 + 2 + \ldots + n) = O\left(\frac{(n+1)n}{2}\right) = O(n^2)$$

5

Záleží na pořadí, ve kterém se pak [illegible] poloroviny $h_1, h_2, \dots h_n$.





6 8

Přerovnáme-li položky v náhodném pořadí a spočítáme-li průměrný čas pro výpočet přes všechna pořadí dostaneme tzv. očekávaný čas algoritmu (náhodnostního).

Výpočet očekávaného času

X_i náhodná veličina s hodnotami 0 $\quad v_i = v_{i-1}$

1 $\quad v_i \neq v_{i-1}$

Střední hodnota náhodné veličiny X s hodnotami $a_1, a_2, \dots a_k$

$$EX = a_1 \cdot p(X=a_1) + a_2\, p(X=a_2) + \dots + a_k\, p(X=a_k)$$

3

5

$$EX = 3\,p(\text{padne orel}) + 5\,p(\text{padne panna}) = 3\,\frac{1}{2} + 5\cdot\frac{1}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$$

7

Očekávaný čas algoritmu je

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} O(i)\, X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} O(i)\, E(X_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} O(i) \left\{ 0 \cdot p(v_i = v_{i-1}) + 1 \cdot p(v_i \neq v_{i-1}) \right\}$$

Potřebujeme spočítat pravděpodobnost, že $v_i \neq v_{i-1}$.

Každé v_j leží na 2 hraničních přímkách polorovin

v_i leží na l_i, pak $v_i \neq v_{i-1}$ $\quad$ v_i leží na $l_j \cap l_k$ kde $j,k \in \{1,2,\dots i\}$ $\quad$ $\frac{2}{i}$

8

Pravděpodobnost, $p(v_i \neq v_{i-1}) \leq \frac{2}{i}$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} O(i) X_i\right) = \sum O(i)\,\frac{2}{i} = \sum_{i=1}^{n} O(2) = O(n)$$

$\Rightarrow$ Při použití náhodnostního algoritmu bude očekávaný čas $O(n)$.

9

Neomezená úloha lin. programování

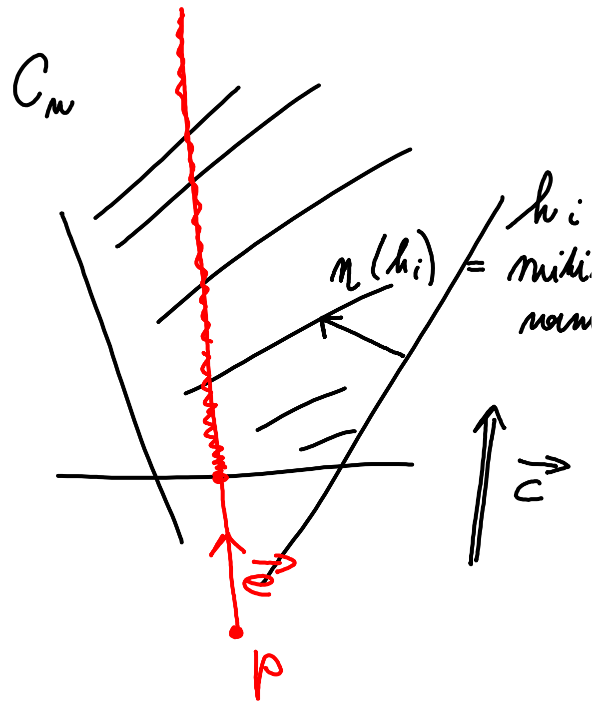
Pro $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ se může stát, že

v $\quad C_n = h_1 \cap h_2 \cap \dots \cap h_n$

leží polopřímka

$$\rho = \{ p + \lambda \vec{e},\ \lambda \geq \lambda_0 \}$$

a f roste pro $\lambda \longrightarrow \infty$



$$f(x) = c_1 x + c_2 y$$

10

Co musí platit pro směrový vektor $\vec{e}$ této polopřímky:

(1) $\vec{e} \cdot \vec{c} > 0$ (f roste ve směru polopřímky)

(úhel vektorů $\vec{e}$ a $\vec{c}$ je menší než $90°$)

(2) $\vec{e} \cdot \eta(h_i) \geq 0$ pro ~~[illegible]~~ normálové vektory (mínus) všech poloroviin

(úhel mezi $\vec{e}$ a $\eta(h_i)$ musí být $\leq 90°$), jinak by směrový vektor polopřímky vedl do poloroviny h_i

$=$

11

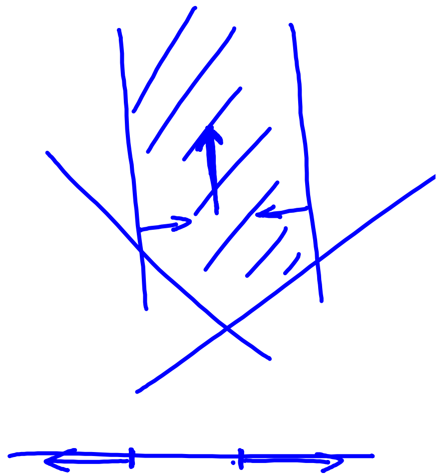
Jak najdeme vektor $\vec{e}$, pokud existuje?

Nechť $\vec{c}=(c_1,c_2)$ je takový, že $c_2>0$.

Vektor $\vec{e}$ budeme hledat ve tvaru $\vec{e}=(e_1, 1)$

Chceme, aby $\vec{e}\cdot\vec{c} > 0$

$$\vec{e}\cdot\vec{c} = c_1 e_1 + \underbrace{c_2\cdot 1}_{>0}$$



Teď e_1 musí splňovat nerovnosti dané skalárními součiny

$$\vec{e}\cdot\eta(h_i)\ge 0 \qquad e_1\cdot\eta_1(h_i) + 1\cdot\eta_2(h_i) \ge 0$$

$$\eta_1(h_i)\cdot e_1 \ge -\eta_2(h_i)$$

Nalezení e_1 je úloha lin. programování v dim 1.

2 možnosti (1) e_1 neexistuje

v tomto případě existují 2 poloroviny h_j a h_k tak, že

funkce $f = c_1 x + c_2 y$ je omezená v $h_j \cap h_k$

V tomto případě vrátíme řešení omezeného lin. programování

s $m_1 = h_j$

$m_2 = h_k$

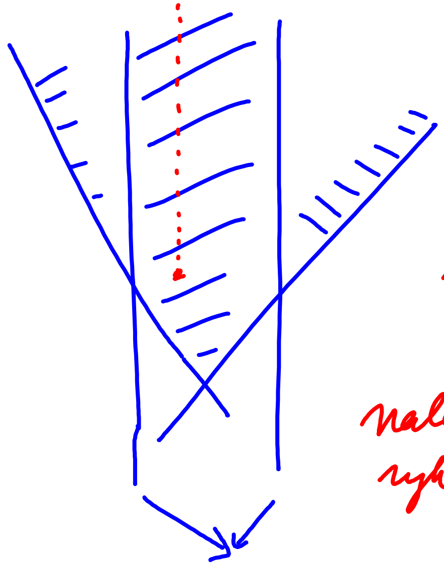
(2) Pokud e existuje, je úloha neomezená. Po nalezení $\vec{e}$ definujeme

$$H' = \{ h_i \in H, \ \vec{e} \cdot \eta(h_i) = 0 \}$$

13

Opět mohou nastat 2 možnosti:

A

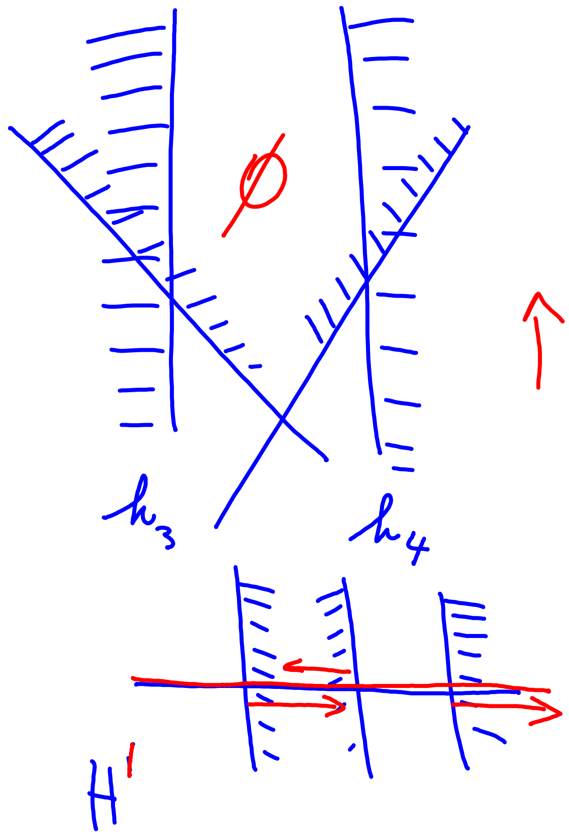


$\uparrow \vec{c}$

nalezneme $\vec{c}$ vyhovující

polorovina z H' mají neprázdný průnik

B



průnik $\cap H$

Zde

$h_3 \cap h_4 =$

$\Downarrow$

$C_n = h_1 \cap \dots \cap$

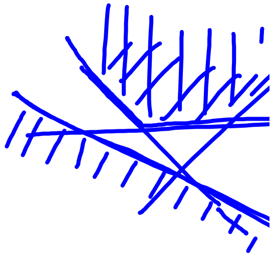
$= \emptyset$

$\vec{s}$ je směr ko

na $\eta(h_i)$

14

Zjištění, zda $\bigcap H' = h_{i_1} \cap h_{i_2} \cap \dots \cap h_{i_j}$ polorovin v H' je prázdný nebo není, je záležitostí 1 dim. lin. programování.



Možné výsledky hledání vektoru $\vec{e}$

(1) najdeme h_j, h_k tak, že f je omezená na $h_1 \cap h_2$, převedeme omezenou úlohu lin. programování

(2) zjistíme, že $\bigcap H = \emptyset$

(3) najdeme $\vec{e}$ tak, že f roste ve směru $\vec{e}$ a polopřímka ve směru vektoru $\vec{e}$ leží v $\bigcap H$.