Teorie množin

- V matematice je všechno množina
  - I čísla jsou definována pomocí množin
- Informatika stojí na matematice
- Znalosti Teorie množin využijeme
  - v databázových systémech
  - v informačních systémech
  - při navrhování algoritmů
  - …
- Čekají nás
  - základní množinové operace
  - kartézské součiny, relace
  - zobrazení, operace

Pojem množina

- Naivní teorie množin
  - Množina je souhrn objektů
  - Paradoxy naivní teorie množin
- Axiomatická teorie množin
  - Množina je primitivní pojem
  - Množiny, které by vedly ke sporu není možné konstruovat
- Určení množiny
  - Výčtem prvků: $M = \{1,2,3\}$
  - Vlastností: $M = \{n \in \mathbf{N} \mid n < 4\}$

Příslušnost do množiny

- Intuitivně se držíme označení „množina“ pro „souhrn objektů“
- Skutečnost, že a **je prvkem množiny** A, značíme $a \in A$.
- Skutečnost, že a **není prvkem množiny** A, značíme $a \notin A$.

Počet prvků množiny

- Též označovaný pojmem **mohutnost** nebo **kardinalita**
- Značíme |M|
  - Např. pro M = {1, 2} je |M|=2
- Konečné množiny
  - mají konečný počet prvků
  - tedy $|M| \in \mathbf{N}$
- Nekonečné množiny
  - mají nekonečný počet prvků
  - tedy $|M| \notin \mathbf{N}$
- Prázdná množina
  - nemá žádný prvek
  - značení $\emptyset$ nebo {}
    - NE $\{\emptyset\}$
  - Platí tedy, že $|\emptyset|=0$

Rovnost množin

- Def.: Dvě množiny jsou si **rovny**, jestliže mají stejné prvky
- Značíme A = B

$$\mathbf{A = B \Leftrightarrow ((\forall x)((x \in A) \Rightarrow (x \in B)) \wedge (\forall x)((x \in B) \Rightarrow (x \in A))(}$$

- Platí zřejmá implikace
  $(A = B) \Rightarrow (|A| = |B|)$

Příklady

- Určete počet prvků množin
  - $A = \{a, b, c, d\}$
  - $B = \{a, a, b, b\}$
  - $C = \{a, \{b, c\}, d\}$
  - $D = \{\{a, b, c, d\}\}$
  - $E = \{\emptyset, \{a, b\}, c\}$
  - $F = \{\emptyset, \emptyset\}$
  - $G = \{\emptyset\}$
- Které z uvedených množin jsou si rovny?

Podmnožina

- Def.: Řekneme, že množina A je **podmnožinou** množiny B, právě tehdy, když každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B.
- Značíme $A \subseteq B$
- Platí tedy $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$
- Pojem podmnožina připouští i rovnost množin
  - Každá podmnožina je podmnožinou sebe sama
  - $A = B \Rightarrow A \subseteq B$, čili $A \subseteq A$
- Prázdná množina je podmnožinou každé množiny
  - $\emptyset \subseteq A$ pro libovolnou množinu A
  - Tedy speciálně i $\emptyset \subseteq \emptyset$
- $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)) \Rightarrow (A = B)$
- $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \Rightarrow (A \subseteq C)$

Vlastní podmnožina

- Řekneme, že množina A je vlastní podmnožinou množiny B právě tehdy, když je její podmnožinou, ale $A \neq B$
- Značíme $A \subset B$
- V množině B tedy existují prvky, které nejsou prvky množiny A
- Platí:
  - $(A \subset B) \Rightarrow (A \subseteq B)$ (ale ne naopak!)

Potenční množina

- Množinu všech podmnožin množiny A nazveme **potenční množinou** množiny A
- Značíme P(A)
- Příklady
  - $P(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
  - $P(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$
  - $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- Otázka: Kolik prvků má potenční množina n-prvkové množiny?
- Příklad: Určete $P(P(\{d\}))$ a $P(P(\emptyset))$

Sjednocení množin

- Je množina prvků, které patří alespoň do jedné ze sjednocovaných množin.
- Značíme $A \cup B$
- $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$
- Příklad
  - $A = \{a, b, c, d\}$
  - $B = \{a, c, e\}$
  - $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$
- Vlastnosti sjednocení
  - $A \subseteq (A \cup B)$ pro libovolné množiny A, B
  - $(A \cup B) = (B \cup A)$
  - $(A \cup \emptyset) = A$

Průnik množin

- Je množina prvků, které patří alespoň do obou množin současně.
- Značíme $A \cap B$
- $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
- Příklad
  - $A = \{a, b, c, d\}$
  - $B = \{a, c, e\}$
  - $A \cap B = \{a, c\}$
- Vlastnosti průniku
  - $(A \cap B) \subseteq A$ pro libovolné množiny A,B
  - $(A \cap B) = (B \cap A)$
  - $(A \cap \emptyset) = \emptyset$
- Množiny se nazývají **disjunktní**, jestliže mají prázdný průnik
  - tj. nemají žádný společný prvek

Rozdíl množin

- Rozdíl množin A a B je množina prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B.
- Značíme A-B
- $A - B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
- Příklad
  - $A = \{a, b, c, d\}$
  - $B = \{a, c, e\}$
  - $A - B = \{b, d\}$
- Vlastnosti rozdílu
  - $(A - B) \subseteq A$ pro libovolné množiny A, B
  - $(A - B) = (B - A) \Rightarrow (A = B)$
  - $(A - \emptyset) = A$
  - $\emptyset - A = \emptyset$

Vlastnosti množinových operací

- Sjednocení a průnik je komutativní a asociativní
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Rozdíl není ani komutativní, ani asociativní
- Platí zákony idempotence
  - $A \cup A = A$
  - $A \cap A = A$
- Platí distributivní zákony
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Příklady

- Dokažte platnost distributivních zákonů pomocí Venových diagramů i pomocí formálního jazyka teorie množin
- Dokažte, že platí
  - $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
  - $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Doplněk množiny v množině

- Nechť A a M jsou množiny takové, že $A \subseteq M$. **Doplňkem množiny** A v množině M nazveme množinu všech prvků, které jsou prvky množiny M, ale nejsou prvky množiny A.
- Značíme A'_M
- Platí $A'_M = M - A$
- O doplňku hovoříme tehdy, je-li množina A podmnožinou nějakého univerza M . V opačném případě hovoříme o rozdílu

Vlastnosti doplňku (předp. A $\subseteq$ M)

- Zákony jednotky
  - $A \cup M = M$ $\qquad$ $A \cap M = A$
  - $A \cup \emptyset = A$ $\qquad$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
- Zákony negace
  - $A \cup A'_{\mathrm{M}} = M$ $\qquad$ $A \cap A'_{\mathrm{M}} = \emptyset$
  - $M'_{M} = \emptyset$ $\qquad$ $\emptyset' = M$
- de Morganovy zákony
  - $(A \cap B)'_{\mathrm{M}} = A'_{\mathrm{M}} \cup \mathrm{B}'_{\mathrm{M}}$
  - $(A \cup B)'_{\mathrm{M}} = A'_{\mathrm{M}} \cap B'_{\mathrm{M}}$

Číselné množiny

- **N** – přirozená čísla: 1, 2, 3, ...
- **Z** – celá čísla: 0, 1, -1, 2, -2, ...
- **Q** – racionální čísla: desetinná čísla, která lze vyjádřit ve tvaru zlomku celého a přirozeného čísla
- **R** – reálná čísla: čísla, jež lze znázornit na číselné ose
- **C** – komplexní čísla: uspořádané dvojice reálných čísel
- Platí $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$

Příklady

- Vypočtěte množinu C, jestliže víte, že $C = \{B\} \cup B$, $B = \{A\} \cup A$ a $A = \{\emptyset\}$
- Zapište všechny podmnožiny množiny $A = \{0, ½, -1, \pi\}$, které jsou současně podmnožinou množiny
  - **N**
  - **Z**
  - **Q**
  - **R**

Příklady

- Rozhodněte, zda platí
  - $\emptyset \in \emptyset$
  - $\emptyset \in \{\emptyset\}$
  - $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$
  - $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$
  - $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$
  - $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
  - $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$
  - $\emptyset = \{\emptyset\}$

Uspořádaná dvojice

- Prvky množiny nejsou uspořádané
- Dvouprvková množina společně s uspořádáním prvků se nazývá **uspořádaná dvojice**
- Značí se (a, b)
- Neplést s {a, b}
- Důsledek uspořádání:
  - {a, b} = {b, a}
  - (a, b) ≠ (b, a) pro a≠b

Kartézský součin

- Jsou dány množiny A, B. Jejich **kartézským součinem** $A \times B$ rozumíme množinu
  $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$
- Kartézský součin je tedy množina všech uspořádaných dvojic takových, že první prvek patří do první množiny a druhý prvek patří do druhé množiny.
- Kartézský součin není komutativní
  - Plyne z nerovnosti $(a, b) \neq (b, a)$
  - $(A \times B = B \times A) \Leftrightarrow (A = B \vee A = \emptyset \vee B = \emptyset)$

Vlastnosti kartézského součinu

- $|A| = m, |B| = n$, pak $|A \times B| = m*n$
- Distributivní zákony
  - $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
  - $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
  - …a stejně tak i kartézské násobení zprava
- Prázdná množina v kartézském součinu
  - $A \times \emptyset = \emptyset$ pro lib. množinu A
  - $\emptyset \times A = \emptyset$ pro lib. množinu A
  - $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$

Kartézský součin více množin

- Kartézská mocnina
  - $A^1 = A$
  - $A^n = A^{n-1} \times A$
- Kartézský součin více množin
  - $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) |\ a_i \in A_i\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$
  - Značení $\displaystyle\bigotimes_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
  - Zřejmě platí $\displaystyle\left|\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$

Binární relace

- (Binární) **relací** rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu dvou množin $\rho \subseteq A \times B$
- Pro prvky $a \in A$ a $b \in B$ takové, že $(a,b) \in \rho$ budeme binární relaci zapisovat pomocí označení $a \rho b$
- Relace je množina, můžeme na ni tedy aplikovat množinové operace
- Prázdná relace: $\emptyset \subseteq A \times B$
- Plná relace: $\rho = A \times B$

N-ární relace

- Připomenutí: Arita = počet operandů
- Řekneme, že ρ je **n-ární relace** právě tehdy, když

$$\rho \subseteq \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$$

- N-ární relace je tedy podmnožina kartézského součinu n množin
- Speciální případ: unární relace $\rho \subseteq A$

Určení relace

- Výčtem prvků
  - A = {0, 1, 2}, B = {a, b}
  - r = {(0,a), (0,b), (1,b), (2,a)}
- Požadovanou vlastností (vztahem prvků)
  - A = B = **Z**
  - r = {(a,b)| a $\leq$ b}
- Graficky pomocí spojnic prvků ve Venových diagramech
- Graficky pomocí tabulky

	a	**b**
0	1	1
1	0	1
2	1	0

Skládání relací

- Mějme $\rho \subseteq A \times B$ a $\sigma \subseteq B \times C$
- Definujeme **složenou relaci** $\sigma \circ \rho$ (čteme σ po ρ) takto:

  $\sigma \circ \rho = \{(a,c) \mid \exists b \in B: (a \rho b \land b \sigma c)\}$
- Skládání relací je asociativní
  - $(\sigma \circ \rho) \circ \pi = \sigma \circ (\rho \circ \pi)$

Relace na množině

- **Binární relace na množině** je zvláštní případ relace, kdy $A = B$ (tedy $\rho \subseteq A \times A$)
- **N-ární relace na množině** $\rho \subseteq A^n$

- Relace identita
  - $id_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$
- Vlastnosti identity a skládání zobrazení
  - $\rho \circ id_A = \rho$
  - $id_B \circ \rho = \rho$

Inverzní relace

- Nechť $\rho \subseteq A \times B$ je relace.
  Relaci $\rho^{-1} \subseteq B \times A$ nazveme inverzní relací k relaci ρ právě tehdy, když pro $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ platí, že $(a,b) \in \rho \Leftrightarrow (b,a) \in \rho^{-1}$
- Inverzní relace tedy obsahuje právě opačné uspořádané dvojice
- Platí tedy $b\rho^{-1}a \Leftrightarrow a\rho b$
- Inverze složené relace
  - $(\sigma \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$

Reflexivní relace

- Řekneme, že relace $\rho \subseteq A \times A$ je **reflexivní** právě tehdy, když $(\forall a \in A)(a \rho a)$
- Tedy když každý prvek množiny je v relaci sám se sebou
- Tedy pokud $id_A \subseteq \rho$
- V tabulce relace jsou 1 na hlavní diagonále
- Příklady reflexivních relací
  - $=$, $\leq$, $|$
  - Mít stejné jméno, mít stejnou barvu očí, ...

Symetrická relace

- Řekneme, že relace $\rho \subseteq A \times A$ je **symetrická** právě tehdy, když $(\forall a,b \in A)(a\rho b \Rightarrow b\rho a)$
- Ke každé uspořádané dvojici, která je v relaci, je v relaci i dvojice opačná
- Tedy $\rho^{-1} \subseteq \rho$
- Tabulka relace je symetrická podle hlavní diagonály
- Příklady symetrických relací
  - =, ≠, dávat stejný zbytek po dělení 7
  - být vlastním sourozencem, být příbuzný

Antisymetrická realce

- Řekneme, že relace $\rho \subseteq A \times A$ je **antisymetrická** právě tehdy, když $(\forall a,b \in A)(a \rho b \wedge b \rho a \Rightarrow a = b)$
- Je-li spolu s danou dvojicí v relaci zároveň i dvojice opačná, nutně se musí jednat o dvojice stejných prvků
- Tedy $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq id_A$
- V tabulce relace jsou na polích symetrických podle hlavní diagonály vždy různé hodnoty
- Příklady antisymetrických relací
  - $\leq$, $\geq$, $\subseteq$, | (na **N**)

Tranzitivní relace

- Řekneme, že relace $\rho \subseteq A \times A$ je **tranzitivní** právě tehdy, když $(\forall a,b,c \in A)((a\rho b \wedge b\rho c) \Rightarrow a\rho c)$
- Jsou-li v relaci prvek a s prvkem b a prvek b s prvkem c, pak musí být v relaci i prvek a s prvkem c.
- Tedy $\rho \circ \rho \subseteq \rho$
- Tranzitivitu relace nelze na první pohled vyčíst z tabulky
- Příklady tranzitivních relací
  - $\geq, \leq, \subseteq, <, >, =, |$
  - mít stejné …

Asymetrická relace

- Řekneme, že relace $\rho \subseteq A \times A$ je **asymetrická** právě tehdy, když $(\forall a,b \in A)(a \rho b \Rightarrow \neg b \rho a)$
- Situace, že by s některou uspořádanou dvojicí byla v relaci i dvojice opačná, nenastává nikdy.
  - Tedy ani u dvojic, v nichž je některý prvek sám se sebou.
- Tedy $\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$
- V tabulce jsou na polích symetrických podle hlavní diagonály opačné hodnoty a na hlavní diagonále jsou nuly
- Příklady asymetrických relací
  - $<$, $>$, $\subset$
  - být matkou, být otcem, …

Relace úplná

- Řekneme, že relace $\rho \subseteq A \times A$ je **úplná** právě tehdy, když
  $(\forall a \in A, \forall b \in A)\ (a\rho b \vee b\rho a)$
- Tedy každé dva prvky lze uspořádat do takové dvojice, která je prvkem relace
- Úplná relace je zřejmě reflexivní
- Pro každou dvojici polí symetrických podle hlavní diagonály platí, že alespoň na jednom z nich je 1
- Příklady úplných relací:
  - $\leq$
  - být vyšší, být starší, …

Relace ekvivalence

- Relaci ρ nazveme relací **ekvivalence** právě tehdy, když je zároveň reflexivní, symetrická, tranzitivní
- Ekvivalence je jistým zobecněním rovnosti
- Příklady relace ekvivalence
  - =, dávat po dělení *n* stejný zbytek
  - mít nějakou vlastnost stejnou
- Ekvivalence na množině jednoznačně definuje **rozklad na disjunktní podmnožiny**, jejichž sjednocením je celá množina
  - V každé **třídě rozkladu** jsou prvky, které jsou spolu v relaci

Relace uspořádání

- Relaci ρ nazveme relací **uspořádání** právě tehdy, když je zároveň reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.
- Uspořádání nazýváme **úplné**, jestliže pro $\forall a,b \in A$ platí $a \rho b \vee b \rho a$
  - Tedy jestliže lze každé dva prvky srovnat
  - Kromě zmíněných tří vlastností musí být relace i úplná
  - Prvky úplně uspořádané množiny tvoří jeden řetězec
- Příklady uspořádání
  - Úplné uspořádání $\leq$, $\subseteq$
  - Neúplné uspořádání: | (na **N**)

Zobrazení

- Def.: Jsou dány množiny A a B a relace $\rho \subseteq A \times B$. Relaci ρ nazveme **zobrazení** právě tehdy, když $(\forall a \in A)(\exists! b \in B)(a \rho b)$
- Zobrazením tedy nazveme takovou relaci, kde ke každému prvku z množiny A existuje jediný prvek z množiny B, který je s ním v relaci.
- Zobrazení mezi číselnými množinami nazýváme **funkce**.

Vzor, obraz

- Vzhledem k tomu, že ke každému prvku $a \in A$ je prvek $b \in B$ určen jednoznačně, lze namísto $a \rho b$ nebo $(a,b) \in \rho$ psát $\rho(a) = b$
- Def.: Je dáno zobrazení f takové, že $f(a) = b$.
  - Prvek b nazýváme **obraz** prvku a
  - Prvek a nazýváme **vzor** prvku b
- Pozn.: Definice zobrazení vyžaduje, aby každý prvek množiny A měl jediný obraz. Naopak to však neplatí, jeden prvek množiny B může mít více vzorů.

Definiční obor. Obor hodnot

- Def.: Je dáno zobrazení $f \subseteq A \times B$. Množinu A nazýváme **definiční obor** zobrazení f a značíme jej **D(f)** nebo **Dom(f)**
- Def.: Je dáno zobrazení $f \subseteq A \times B$. Množinu $H(f) = \{b \in B \mid \exists a \in A: f(a) = b\}$ **nazveme obor** hodnot zobrazení f.
- Namísto značení **H(f)** se někdy používá **Im(f).**
- Obor hodnot zobrazení je tedy množina takových prvků, které mají svůj vzor.
- Skutečnost, že $f \subseteq A \times B$ je zobrazení, častěji zapisujeme jako $\mathbf{f: A \to B}$

Poznámky k definici zobrazení

- Někdy se místo „existuje právě jeden“ říká „existuje maximálně jeden“
- V množině A tak mohou existovat prvky, které nemají svůj obraz v množině B
- Definiční obor zobrazení je pak podmnožinou množiny A
- Rozlišujeme zobrazení „množiny A“ a „z množiny A“
- My se budeme držet uvedené definice, v níž je definiční obor celá množina A

Surjekce

- Def.: Je dáno zobrazení f: A $\rightarrow$ B. Jestliže Im(f) = B, zobrazení f nazýváme **zobrazením na množinu**, nebo též **surjekce**.
- U surjektivního zobrazení je tedy oborem hodnot celá množina B. každý prvek má tedy svůj vzor v množině A.
- Formální zápis surjektivního zobrazení:
  $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$

Injekce

- Def.: Je dáno zobrazení f: A $\to$ B. Toto zobrazení nazveme **injekce**, nebo též **prosté zobrazení**, jestliže $(\forall a_1, a_2 \in A)(f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)$
- Tedy pokud každé dva různé prvky mají různé obrazy
- Připomeňme, že žádný prvek nemůže mít dva různé obrazy (nebylo by to zobrazení), definice zobrazení však nevylučovala případ, kdy mají dva prvky stejný obraz.

Bijekce

- Def.: Je dáno zobrazení f: $A \to B$. Zobrazení f nazveme **bijekce** právě tehdy, když je zároveň injekce a surjekce
- Tedy když je zároveň na množinu a prosté.
- Bijekce se též nazývá **párování 1:1**
- Věta: Nechť A, B jsou množiny a f: $A \to B$ je bijekce. Pak $|A| = |B|$.
- Existence bijekce tedy dokazuje stejnou mohutnost množin

Skládání zobrazení

- <u>Def</u>.: Jsou dány množiny A, B, C a zobrazení $f: A \to B$ a $g: B \to C$. **Složeným zobrazením** $g \circ f$ nazveme složenou relaci $g \circ f$
- <u>Pozn</u>.: Je zřejmé, že relace vzniklá složením dvou zobrazení je opět zobrazení.
- $g \circ f: A \to C$ a platí, že $g \circ f(x) = g(f(x))$
- Skládání zobrazení není komutativní
- Skládání zobrazení je asociativní

Inverzní zobrazení

- Def.: Je dáno prosté zobrazení $f: A \to B$. **Inverzním zobrazením** k zobrazení f nazveme zobrazení $f^{-1}: Im(f) \to A$ takové, že pro $\forall a \in A$ a $\forall b \in B$ platí, že $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$.
- Požadavek prostosti zobrazení zaručuje, že inverzní relace bude zobrazením.
- Zřejmě $f^{-1}(f(x)) = x$
- Tedy $f^{-1} \circ f = id$

Inverze složeného zobrazení

- Věta.: Jsou dány množiny A, B, C a zobrazení $f: A \to B$ a $g: B \to C$. Pak platí: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- Příklad: $A = B = C = \mathbf{R}$
  $f(x) = 3x$ $g(x) = x-8$
- $(g \circ f)(x) = 3x-8$, $(g \circ f)^{-1}(x) = (x+8)/3$
  $f^{-1}(x) = x/3$, $g^{-1}(x) = x+8$
  $f^{-1} \circ g^{-1}(x) = (x+8)/3$

Operace

- Nechť A je množina a n přirozené číslo. Zobrazení $A^n \to A$ nazýváme n-ární **operací** na množině A. Číslo n nazýváme **arita** (četnost) operace.
- Pro n=0 hovoříme o nulární operaci
  - výběr konstanty
- Pro n=1 hovoříme o unární operaci
  - např $\log_z x$, x^2, $-x$
- Pro n=2 hovoříme o binární operaci
  - např x+y, x*y, …

Vztah relací, zobrazení a operací

- Operace je zobrazení. Zobrazení je relace. Tudíž operace je relace.
- Binární operace sčítání je tedy ve skutečnosti ternární relace obsahující právě prvky typu (a, b, a+b)
- Unární operace mínus je ve skutečnosti binární relace obsahující právě prvky typu (x, -x)

Vlastnosti operací

- Uzavřenost množiny vzhledem k operaci
  - Výsledek operace náleží do dané množiny
  - Plyne přímo z definice operace
  - Např. množina **N** není uzavřená vzhledem k operaci odčítání
- Řekneme, že operace $@: A^2 \rightarrow A$ je **komutativní**, právě tehdy, když $(\forall x,y \in A)$ $x@y = y@x$.
- Řekneme, že operace $@: A^2 \rightarrow A$ je **asociativní**, právě tehdy, když $(\forall x,y,z \in A)$ $(x@y)@z = x@(y@z)$

Neutrální a inverzní prvek

- Je dána operace @ : $A^2 \rightarrow A$. Prvek $e \in A$ nazýváme **neutrálním prvkem** operace @ právě tehdy, když $(\forall a \in A)(e@a=a@e=a)$
- Například 0 je neutrální prvek vzhledem k +, 1 je neutrální prvek vzhledem k *
- Je dána operace @ : $A^2 \rightarrow A$ s neutrálním prvkem e. Prvek $q \in A$ nazýváme **inverzním prvkem** k prvku p vzhledem k operaci @ právě tehdy, když $(p@q=q@p=e)$
- Například -5 je inverzní (opačný) prvek k 5 vzhledem k +, 1/3 je inverzní prvek k 3 vzhledem k *

K zamyšlení…

- Na množině všech řetězců nad abecedou Σ je dána operace zřetězení.
- Zdůvodněte, proč se jedná o operaci
- Rozhodněte, zda je operace zřetězení komutativní
- Rozhodněte, zda je operace zřetězení asociativní
- Nalezněte neutrální prvek
- Jak je to s inverzním prvkem?

Shrnutí teorie množin

Pojem množina, podmnožina

- Množina je (v naivní teorii množin) souhrn objektů.
- Množinu lze zadat výčtem nebo danou vlastností
- Příslušnost prvku do množiny značíme $\in$
- Dvě množiny jsou si rovny právě tehdy, když mají stejné prvky
- Prázdná množina $\emptyset$ nemá žádné prvky
- $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$
- Prázdná množina je podmnožinou každé množiny
- Množina všech množin dané množiny se nazývá potenční množina
- Počet prvků potenční množiny n-prvkové množiny je 2^n

Množinové operace

- $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$
- $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
- Sjednocení a průnik jsou komutativní a asociativní
- $A - B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
- $A'_M = M - A$ (za předpokladu $A \subseteq M$)
- Platí distributivní zákony, idempotentní zákony, deMorganovy zákony, zákony jednotky a zákony negace

Kartézský součin, relace

- $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$
- Platí distributivní zákony vzhledem ke sjednocení a průniku
- Kartézská mocnina: $A^1 = A$, $A^n = A^{n-1} \times A$
- Kartézský součin více množin: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$
- Jakoukoliv podmnožinu kartézského součinu nazveme relací.
- Prázdná množina = prázdná relace
- Celý kartézský součin = plná relace
- Relace na množině: $\rho \subseteq A \times A$

Vlastnosti relací

- Inverzní relace: $(a,b)\in\rho \Leftrightarrow (b,a)\in\rho^{-1}$
- Složená relace: $\rho \subseteq A \times B$ a $\sigma \subseteq B \times C$, $\sigma \circ \rho = \{(a,c) \mid \exists b\in B\colon (a\rho b \wedge b\sigma c)\}$
- Reflexivní relace: $(\forall a\in A)(a\rho a)$
- Symetrická relace: $(\forall a,b\in A)(a\rho b \Rightarrow b\rho a)$
- Antisymetrická relace: $(\forall a,b\in A)(a\rho b \wedge b\rho a \Rightarrow a = b)$
- Tranzitivní relace: $(\forall a,b,c\in A)((a\rho b \wedge b\rho c) \Rightarrow a\rho c)$
- Asymetrická relace: $(\forall a,b\in A)(a\rho b \Rightarrow \neg b\rho a)$
- Úplná relace: $(\forall a,b\in A)\ (a\rho b \vee b\rho a)$
- Ekvivalence: reflexivní, symetrická, tranzitivní
- Uspořádání: reflexivní, antisymetrická, tranzitivní