Strukturovaný diskrétní dynamický lineární model populace

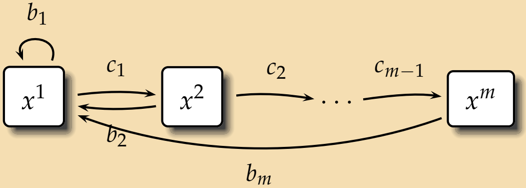
Leslieho model.

Model věkově strukturované populace. Můžeme jej použít např. pro modelování populace víceleté rostliny, populace ryb nebo i lidí. Obecně je tedy účelem modelu znát (diskrétní) vývoj struktury populace.

Koncepce:

Proměnnými budou jistě jednotlivé věkové třídy populace: $x^1, \dots x^m$. Populace se kontroluje po určitých pevných intervalech. Některé skupiny produkují nové jedince, a to s různou mírou reprodukce $b_i > 0$ (dospělí jedinci), jiné mají míru reprodukce nulovou, $b_i = 0$ (nedospělí jedinci). Po nějakém čase přechází určitá část dané třídy x^i do následující třídy x^{i+1} (tyto míry přežití označíme pro každou třídu c_i.)

Diagram:



Rovnice:

$$\begin{pmatrix} x^1_{n+1} \\ x^2_{n+1} \\ \vdots \\ x^m_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{m-1} & b_m \\ c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{m-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1_n \\ x^2_n \\ \vdots \\ x^m_n \end{pmatrix}$$

Dostáváme lineární systém diferenčních rovnic s Leslieho maticí L a vektorem iterací struktury populace $X_n = (x^1_n, x^2_n, \dots, x^m_n)$, tj.

$$X_{n+1} = LX_n.$$

Věta: Předpokládejme, že pro matici L a $1 \le i \le m$ platí: $b_i \ge 0$, existuje nějaké i tak, že $b_i > 0$ a $b_{i+1} > 0$, a $0 \le c_i \le 1$. Pak má matice L jedinou kladnou, tzv. striktně dominantní, reálnou vlastní hodnotu $\lambda_1 > 0$ a X_{λ_1} má všechny složky kladné.

Poznámka 9. Protože je λ_1 striktně dominantní, bude pro velká n

$$X_n \approx k_1 \lambda_1^n X_{\lambda_1}.$$

Věková struktura populace se tedy stabilizuje proporcionálně vlastnímu vektoru X_{λ_1}. Procentní vyjádření je tedy dáno normalizovaným vektorem

$$P = \frac{X_{\lambda_1}}{|X_{\lambda_1}|}.$$