Domácí úloha z 18. září 2014 (odevzdává se 25. září 2014)

V následujícím zadání značí $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ systém všech podmnožin množiny $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel.

1. Na množině $M = \{(a, X) \in \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid a \in X\}$ definujeme binární relaci $\preceq$ takto: pro libovolné $(a, X), (b, Y) \in M$ klademe

   $$(a, X) \preceq (b, Y) \quad \Longleftrightarrow \quad (a \leq b \text{ a současně } X \subseteq Y).$$

   Dokažte, že $(M, \preceq)$ je uspořádaná množina, a rozhodněte, zda je to svaz.

2. Pro výše uvedenou množinu M označme $M^{\perp} = M \cup \{\perp\}$ a dodefinujme uspořádání $\preceq$ na celou množinu $M^{\perp}$ podmínkou, že $\perp$ je její nejmenší prvek, tj. platí $\perp \preceq \perp$ a také $\perp \preceq (a, X)$ pro každé $(a, X) \in M$. Rozhodněte, zda je $(M^{\perp}, \preceq)$ svaz, resp. úplný svaz.

Svá rozhodnutí zdůvodňujte.