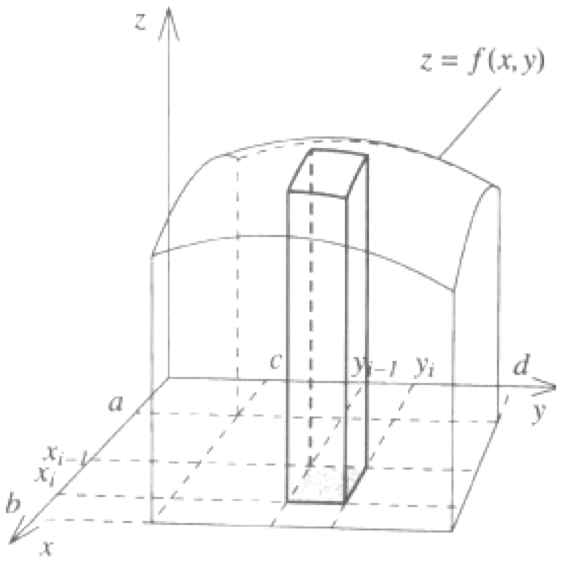
1 Dvojný a dvojnásobný integrál

Doposud jsme se zabývali integrály, jejichž integrační obory byly jednorozměrné. Nyní se posuneme o dimenzi výše a budeme se zabývat integrály, jejichž integrační obory budou dvourozměrné. Budeme integrovat funkce dvou proměnných přes část roviny $D \subset \mathbb{R}^2$, kde D bude zpočátku čtverec, nebo obdélník, později i jiná část roviny. Význam dvojného integrálu je analogický významu integrálu funkce jedné proměnné. Pouze zde není obsahem plochy, ale objemem tělesa vzniklého nad rovinou xy shora ohraničeného plochou definovanou funkcí $f(x, y)$ s průmětem do části roviny xy, jak je znázorněno na následujícím obrázku.



Obrázek 1: Grafické znázornění významu dvojného integrálu.

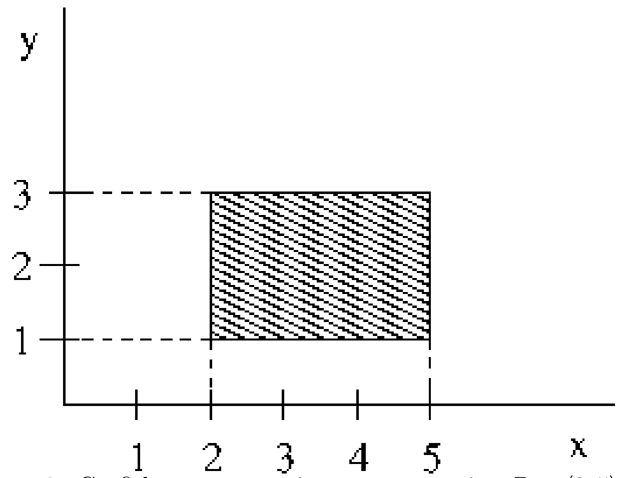
Je-li průmětem do roviny xy čtverec, nebo obdélník a integrovaná funkce je konstantní, je výsledkem integrace dvojného integrálu objem vzniklého hranolu. Jedná-li se obecnou funkci dvou proměnných, je vzniklé těleso různě křivě seříznuté a výpočet pro normální objem hranolu už není možný. Vzpomeneme-li si ale na definici určitého integrálu funkce jedné proměnné, kdy jsme interval přes který jsme integrovali rozdělili na obdélníčky a počítali jejich obsah, bude dvojný integrál definován podobně. Pouze budeme těleso rozdělovat na hranoly a celkový objem tělesa bude součet jejich objemů, jak je znázorněno na obrázku. Další možnost využití je výpočet obsahu plochy ohraničené křivkami. Zde integrujeme funkci $f(xy) = 1$, jak bude ukázáno v následujících příkladech.

Pro převod dvojných integrálů na dvojnásobný použijeme Fubiniho větu, kdy dvojný integrál převedeme na sled dvou jednorozměrných integrací. Tento převod můžeme použít pro tzv. standardní množiny, tedy množiny ohraničené přímkami na dvou stranách a spojitými funkcemi na zbývajících stranách. V případě složitější oblasti využijeme aditivity integrálů a oblast si rozdělíme na několik jednodušších. Samotný převod a řešení integrálu není složitou záležitostí, klíčovým úkolem je správně určit ohraničení integrační oblasti a její meze. Nyní si ukážeme na několika příkladech postup při řešení dvojného integrálu.

Příklad 1. *Vypočtěte dvojný integrál funkce $z = 5x^2 - 2y^3$ přes množinu $D = \langle 2; 5\rangle \times \langle 1; 3\rangle$.*

Řešení. Nejdříve se podíváme na integrační oblast. Načrtneme si ji do souřadného systému. V našem případě je integrační oblastí obdélník znázorněný na následujícím obrázku 2.

Nyní jsme schopni určit integrační hranice a dvojný integrál převést na dvojnásobný. Proměnná x nabývá hodnot od 2 do 5, proměnná y od 1 do 3. Integrační meze budou tedy pro x od 2 do 5,



Obrázek 2: Grafické znázornění integrační množiny $D = \langle 2; 5\rangle \times \langle 1; 3\rangle$.

pro y od 1 do 3. Matematické vyjádření bude tedy:

$$\iint_D = (5x^2 - 2y^3)dxdy = \int_2^5 \left(\int_1^3 (5x^2 - 2y^3)dy \right) dx$$

Nejprve vyřešíme vnitřní integrál dle proměnné y.

$$\int_1^3 (5x^2 - 2y^3)dy = \left[5x^2 y - \frac{1}{2}y^4 \right]_1^3 = 15x^2 - \frac{1}{2} \cdot 81 - 5x^2 + \frac{1}{2} = 10x^2 - 40$$

Následuje řešení vnějšího integrálu:

$$\int_2^5 (10x^2 - 40)dx = \left[\frac{30x^3}{3} - 40x \right]_2^5 = 10 \cdot \frac{5^3}{3} - 40 \cdot 5 - 10 \cdot \frac{2^3}{3} + 40 \cdot 2 = \frac{1250}{3} - 200 - \frac{80}{3} + 80 = \underline{\underline{270}}$$

Dvojný integrál má hodnotu 270.

Příklad 2. *Vypočítejte dvojný integrál funkce $z = 2xe^y$ přes množinu $D = \langle 0; 2\rangle \times \langle 0; 1\rangle$.*

Řešení. Integrační množinou je opět obdélník s vrcholem v počátku soustavy souřadnic a délkami stran 2 a 1 délkové jednotky. Dvojný integrál tedy převedeme na dvojnásobný a vyřešíme.

$$\iint_D 2xe^y dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^1 (2xe^y)dy \right) dx$$

Vyřešíme vnitřní integrál:

$$\int_0^1 (2xe^y)dy = [2xe^y]_0^1 = 2xe^1 - 2xe^0 = 2xe - 2x$$

Nyní vyřešíme vnější integrál:

$$\int_0^2 (2xe - 2x)dx = \left[2\frac{x^2}{2}e - 2\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = [x^2 e - x^2]_0^2 = 4e - 4 - 0 + 0 = \underline{\underline{4(e-1)}}$$

Hodnota integrálu je tedy $4(e - 1)$.

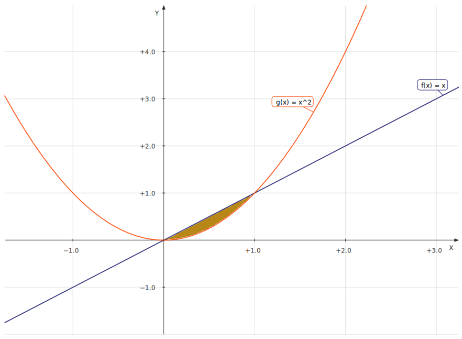
Ukážeme si ještě jednu možnost převodu dvojného integrálu, kterou lze použít pouze pro čtvercovou nebo obdélníkovou oblast a pro funkci, kterou lze rozdělit na součin dvou funkcí, jedné proměnné x a druhé proměnné y. Zadaná funkce splňuje obě podmínky. Pro ostatní případy musíme použít předchozí postup!!!

$$\iint_D 2xe^y dxdy = \left(\int_0^2 2xdx\right)\left(\int_0^1 e^y dy\right) = [x^2]_0^2 \cdot [e^y]_0^1 = \underline{\underline{4(e-1)}}$$

Jak je vidět, došli jsme ke stejnému výsledku s menším počtem výpočetních operací.

Příklad 3. *Vypočtěte dvojný inegrál:* $\iint_D (x-y)dxdy$, *kde* D *je množina ohraničená křivkami* $y = x$ *a* $y = x^2$.

Řešení. Nejdříve si nakreslíme křivky a určíme jejich průsečíky. Z obrázku také poznáme hranice pro integraci. Jak je vidět z obrázku, zvýrazněná plocha integrační množiny nabývá pro x hodnot



od 0 do 1 a pro y od x^2 do x. Mezní hodnoty pro proměnnou x jsou průsečíky přímky $y = x$ a paraboly $y = x^2$. Musí zde tedy platit rovnost jejich funkčních hodnot, tedy $x = x^2$, neboli $x^2 - x = 0$. Tato rovnice má dva kořeny $x = 0$ a $x = 1$. Podíváme-li se na obrázek a budeme sledovat hodnoty proměnné y v závislosti na proměnné x. Vidíme, že blíže ose x je parabola $y = x^2$, bude to tedy dolní integrační mez a horní mezí bude tedy přímka $y = x$. Dvojný integrál tedy přepíšeme na dvojnásobný následovně:

$$\iint_D (x-y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (x-y)dy\right) dx = \int_0^1 \left[xy - \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^x = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{20 - 10 - 15 + 6}{60} = \underline{\underline{\frac{1}{60}}}$$

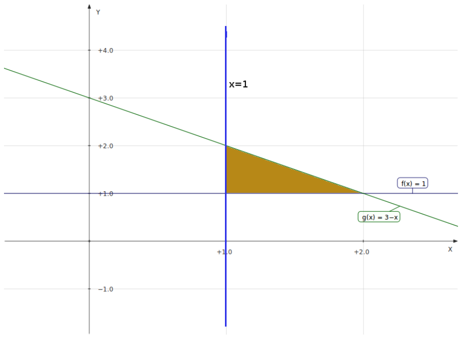
Příklad 4. *Vypočtěte dvojný integrál* $\iint_D x^2 y dxdy$, *kde* D *je trojúhelník ohraničený přímkami:* $x = 1$, $y = 1$ *a* $y = 3 - x$.

Řešení. Nejdříve si zakreslíme přímky do souřadného systému a vyznačíme oblast integrace. Určíme průsečíky a hraniční funkce - meze pro integraci. Je vidět, že x nabývá hodnot od 1 do 2 a y je funkcí od $y = 1$ do $y = 3 - x$. Dvojný integrál tedy přepíšeme na dvojnásobný a vyřešíme:

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_1^2 \left(\int_1^{3-x} x^2 y dy\right) dx = \int_1^2 \frac{1}{2}[x^2 y^2]_1^{3-x} = \frac{1}{2}\int_1^2 (x^2(3-x)^2 - x^2)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 (9x^2 - 6x^3 + x^4 - x^2)dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (8x^2 - 6x^3 + x^4)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{8}{3}x^3 - \frac{6}{4}x^4 + \frac{x^5}{5}\right]_1^2 =$$

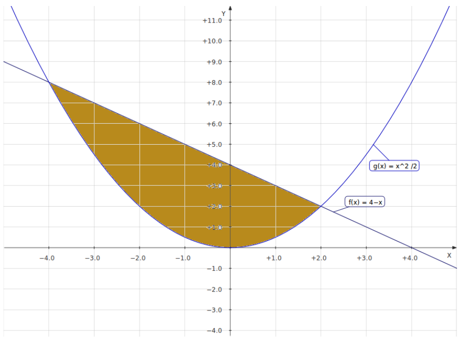
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{64}{3} - 24 + \frac{32}{5} - \frac{8}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{640 - 720 + 192 - 80 + 45 - 6}{30} = \frac{1}{2} \cdot \frac{71}{30} = \underline{\underline{\frac{71}{60}}}$$



Dvojný integrál lze také použít pro výpočet obsahu plochy ohraničené křivkami. Zde potom integrujeme funkci $f(xy) = 1$.

Příklad 5. *Vypočítejte obsah plochy ohraničené křivkami* $y = 4 - x$ *a* $y = \frac{x^2}{2}$.

Řešení. Nejdříve si nakreslíme jak daná plocha vypadá. A určíme hraniční body pro proměnnou x a hraniční funkce pro proměnnou y



Průsečíky funkcí mají x hodnotu -4 a 2. Snadno spočítáme porovnáním obou funkcí:

$$4 - x = \frac{x^2}{2}$$

$$8 - 2x = x^2$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x+4)(x-2) = 0$$

Nyní si zapíšeme dvojný integrál funkce $f(xy) = 1$.

$$\iint\limits_D 1dxdy = \int_{-4}^{2} \left(\int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} 1dy \right) dx = \int_{-4}^{2} [y]_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} dx = \int_{-4}^{2} \left(4 - x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right]_{-4}^{2}$$

$$= 8 - 2 - \frac{8}{6} - \left(-16 - \frac{16}{2} - \left(\frac{-64}{6} \right) \right) = 8 - 2 + 16 + 8 - 12 = \underline{\underline{18}}$$

Obsah plochy je tedy 18 plošných jednotek. Pro kontrolu zkuste daný obsah spočítat ještě pomocí jednoduchého integrálu.