LINEÁRNÍ NEZÁVISLOST

Vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$ jsou „lineárně nezávislé", jestliže pro všechny n-tice skalárů $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ platí implikace

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = O \implies a_1 = a_2 = \dots = a_n = O.$$

Příklady $n = 1$

Jeden vektor u je lineárně nezávislý, právě když $u \neq \vec{O}$.

Jestliže $\vec{u} \neq \vec{O}$, a platí
$$a\vec{u} = \vec{O}, \text{ pak } a = 0.$$

Jestliže $\vec{u} = \vec{O}$, pak $1 \cdot \vec{u} = \vec{O}$

Nulový vektor je lin. závislý.

$n = 2$

Vektory u_1, u_2 jsou lineárně nezávislé, právě když jeden není násobkem druhého.

u_1, u_2 jsou lin. závislé $\exists (a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2$, $(a_1, a_2) \neq (0,0)$.

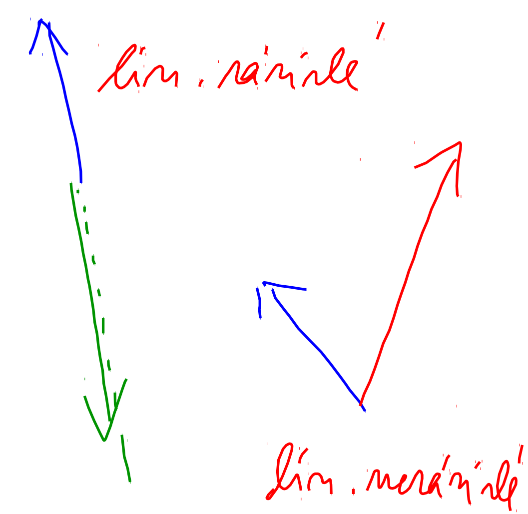
$a_1 \neq 0$ nebo $a_2 \neq 0$, $\quad a_1 u_1 + a_2 u_2 = \vec{0}$

Předp. že $a_1 \neq 0$.

$$a_1^{-1}(a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_1^{-1} \cdot \vec{0}$$

$$u_1 + \frac{a_2}{a_1} u_2 = \vec{0}$$

$$u_1 = -\frac{a_2}{a_1} u_2$$



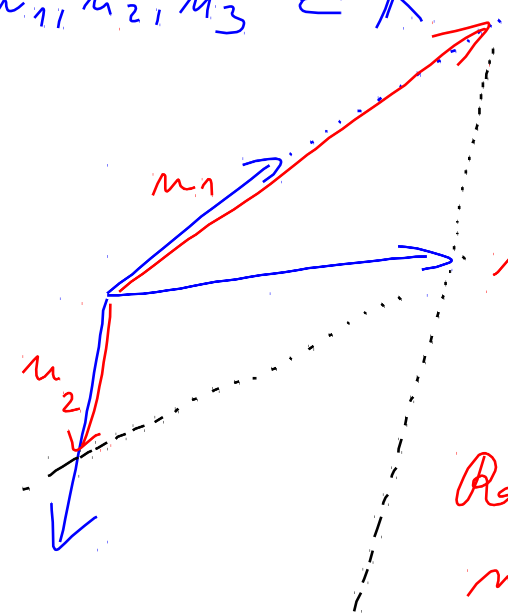
u_1 je násobkem u_2.

Obráceně: Je-li $u_1 = k u_2$, pak $u_1 - k u_2 = 0$

a rovnice $a_1 u_1 + a_2 u_2 = \vec{0}$ má řešení $(1, -k) \neq (0,0)$

$n = 3$

$u_1, u_2, u_3 \in R^2$



$u_2 = a u_1 + b u_3$

$a u_1 - u_2 + b u_3 = \vec{0}$

Rovnice $a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = \vec{0}$

má řešení $(a, -1, b) \neq (0,0,0)$

u_1, u_2, u_3 jsou lin. závislé

Lemma Vektory $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou lin. závislé, právě když jeden je lineární kombinací ostatních.

④

Nechť $u_1, \dots u_n$ jsou LZ. Pak existuje $(a_1, a_2, \dots a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = \vec{0}$$

Předp. že např. $a_2 \neq 0$. Potom

$$\frac{1}{a_2}\left(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n\right) = \frac{1}{a_2} \cdot \vec{0}$$

$$\frac{a_1}{a_2} u_1 + u_2 + \dots \frac{a_n}{a_2} u_n = \vec{0}$$

$$u_2 = -\frac{a_1}{a_2} u_1 - \frac{a_3}{a_2} u_3 - \dots - \frac{a_n}{a_2} u_n$$

Obrácení: Nechť například

$$u_1 = b_2 u_2 + \dots + b_n u_n$$

Potom rovnice $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = \vec{0}$

má řešení $(a_1, a_2, \dots a_n) = (-1, b_2, b_3, \dots b_n) \neq (0, 0, \dots 0)$

Příklad: Zjistěte, zda vektory $u_1 = (1,2,1,0)^T = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ v $\mathbb{R}^4$ jsou lin. nezávislé.

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = \vec{o}$$

$$a_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Zjišťování lin. nezávislosti vždy vede na homogenní soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ 2a_1 + a_2 &= 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 &= 0 \\ 2a_2 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&-1&1\\0&2&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&-2&0\\0&2&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a_3 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ a_1 + a_1 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

má jediné řešení $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Vektory u_1, u_2, u_3 jsou lin. nezávislé.

Vektory $u_1, u_2, \dots u_n \in U$ generují prostor U, jestliže $\forall u \in U \ \exists (a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n$ tak, že

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n.$$

Jinak, pomocí lin. obalu to znamená, že

$$[u_1, u_2, \dots u_n] = U.$$

Řekneme, že prostor U má konečnou dimenzi, jestliže
existuje konečná množina vektorů, které generují prostor U.

$\mathbb{R}^n$ je prostor konečné dimenze.
Je tedy generován vektory
$e_1=(1,0,\dots,0)$, $e_2=(0,1,0,\dots,0)$, $e_3=(0,0,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $e_n=(0,0,\dots,0,1)$.
Každý vektor
$$(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) = x_1\cdot e_1+x_2\cdot e_2+\dots+x_n e_n$$

Polynomy s komplexními koeficienty stupně nejvýše n
$\mathbb{C}_n[x]$ tvoří vekt. prostor nad $\mathbb{C}$. Ten má konečnou dimenzi,
neboť každý polynom stupně $\le n$, je lineární kombinací polynomů
$$1, x, x^2, \dots, x^n.$$

Prostory které nemají konečnou dimenzi jsou např. spojité reálné funkce na intervalu $[0,1]$ $\qquad C[0,1]$.

BÁZE VEKTOROVÉHO PROSTORU

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$ konečné dimenze.
Řekneme, že vektory $u_1, u_2, \dots, u_n \in U$ tvoří bázi prostoru U, jestliže

(1) jsou lin. nezávislé $\left(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = \vec{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \right)$

(2) generují prostor U $\left(\forall u \in U \ \exists a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{K},\ u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n \right)$

Příklady

$\mathbb{R}^3$, vektory e_1, e_2, e_3 $\quad e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

tvoří bázi

jsou LN: $\quad a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = \vec{0}$

$$a_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Generují $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

V $\mathbb{R}^3$ existuje spousta jiných bází

např. $u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Lze ukázat, že jsou LN a generují $\mathbb{R}^3$

Generování

Vektor $u = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &= b_1 \\ x_2 \quad &= b_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= b_3 \end{aligned} \qquad x_3 = b_3 - b_1 - b_2$$

Soustava má řešení $\Rightarrow$ u_1, u_2, u_3 generují $\mathbb{R}^3$.

Podstatné je ukázat, že pro každou pravou stranu je soustava řešitelná.

Báze $\mathbb{R}_3[x]$ .... polynomy stupně ≤ 3 s reálnými koeficienty

$1, x, x^2, x^3$

V dalším dokážeme následující dvě důležitá tvrzení o bázích

– každý konečnědimenzionální prostor má bázi

– každé dvě báze v prostoru konečné dimenze mají stejný počet prvků

Věta o výběru lin. nezávislých vektorů

Nechť ve vekt. prostoru V máme

$v_1, v_2, \dots, v_k$ lin. nezávislé vektory

$u_1, u_2, \dots, u_\ell$ nějaké další vektory.

Z druhého seznamu vektorů lze vybrat vektory $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ tak, že

(1) $v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ jsou LN

(2) $[v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}] = [v_1, v_2, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_\ell]$.

Důsledek Každý konečnědim. prostor má bázi.

Důkaz: U má konečnou dimenzi, proto existují vektory

$u_1, u_2, \dots u_e$ které U generují, tj

$$[u_1, u_2, \dots u_e] = U.$$

V předchozí větě vezmeme seznam vektorů $v_1, \dots v_k$ jako prázdný, a vektory $u_1, u_2, \dots u_e$. Aplikací věty získáme vektory $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_r}$ s vlastnostmi

(1) $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ jsou lin. nezávislé

(2) $[u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}] = [u_1, u_2, \dots, u_e] = U$

Tyto dvě vlastnosti říkají, že $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_r}$ tvoří bázi prostoru U.

Důkaz věty provádíme indukcí podle počtu l vektorů $u_1, u_2, \dots u_l$.

$l = 1$ máme $v_1, v_2, \dots v_k$ LN
a vektor u_1

Můžou nastat 2 možnosti:

(1) u_1 je lin. kombinací $v_1, v_2, \dots v_k$. Pak jej vyzbereme:
$v_1, v_2, \dots v_k$ jsou LN
Stačí dokázat, že

$$[v_1, v_2, \dots v_k] = [v_1, v_2, \dots v_k, u].$$

Vždy platí $[v_1, v_2, \dots v_k] \subseteq [v_1, v_2, \dots, v_k, u]$.
Chceme dokázat opačnou inkluzi.
Víme, že $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k$.
Libovolný prvek z $[v_1, v_2, \dots v_k, u]$ je tvaru

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots b_k v_k + c u = b_1 v_1 + \dots + b_k v_k + c(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots a_k v_k) =$$

$$= (b_1 + ca_1)v_1 + (b_2 + ca_2)v_2 + \dots + (b_k + ca_k)v_k \in [v_1, v_2, \dots v_k].$$

(2) u_1 není lin. kombinací $v_1, v_2, \dots v_k$. Pak u_1 vybereme.

$$[v_1, \dots v_k, u_1] = [v_1, \dots v_k, u_1]$$

Zbývá dokázat, že $v_1, v_2, \dots v_k, u_1$ jsou lin. nezávislé.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k + b_1 u_1 = \vec{o}$$

Chceme ukázat, že $a_1 = a_2 = \dots = a_k = b_1 = 0$.

Jestliže $b_1 = 0$, pak máme

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = \vec{o}$$

$v_1, v_2, \dots v_k$ jsou LN, proto $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$.

Jestliže $b_1 \neq 0$, pak lze u_1 vyjádřit jako lin. kombinaci $v_1, v_2, \dots v_k$.

$$u_1 = -\frac{a_1}{b_1} v_1 - \frac{a_2}{b_1} v_2 - \dots - \frac{a_k}{b_1} v_k,$$ spor s předpokladem.

<u>Indukční krok</u> Nechť věta platí pro $l \geq 1$, dokážeme ji pro $l+1$.

$v_1, v_2 \dots v_k$ LN

$u_1, u_2, \dots, u_l, u_{l+1}$ další vektory.

Podle ind. kroku lze vybrat $u_{i_1}, u_{i_2} \dots u_{i_r}$ tak, že

(1) $v_1, v_2 \dots v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_r}$ jsou LN

(2) $[v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r}] = [v_1, \dots v_k, u_1, \dots u_l]$.

Mohou nastat dvě možnosti

(A) $u_{l+1} \in [v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r}]$

V tomto případě u_{l+1} nevybereme. Platí

$v_1, \dots v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r}$ jsou LN

Dokážeme, že $[v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_r}] = [v_1 \dots v_k, u_1 \dots u_l] =$

16

$$= [v_1, \dots v_k, u_1, \dots u_l, u_{l+1}].$$

Důkaz je dále stejný jako pro $l = 1$.

(B) $u_{l+1} \notin [v_1, \dots v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r}]$

Pak u_{l+1} vybereme. Je jednoduché ukázat, že

$$[v_1, \dots v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r}, u_{l+1}] = [v_1, \dots v_k, u_1, \dots u_l, u_{l+1}]$$

Musíme ukázat, že

$v_1, \dots v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r}, u_{l+1}$ jsou LN.

To se opět provede jako v kroku pro $l = 1$.

ALGORITMUS, který ze seznamu vektorů z K^n vybírá lin. nezávislé se stejným lin. obalem.

Dány vektory $u_1, u_2, \dots u_\ell$ v K^n, z nich vybereme $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_r}$ tak, že

(1) $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_r}$ jsou LN

(2) $[u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_r}] = [u_1, u_2, \dots u_\ell]$.

<u>Postup</u>: Vektory $u_1, u_2, \dots, u_\ell$ napíšeme jako sloupce do matice. Matici upravíme řádk. úpravami na schodovitý tvar. V něm najdeme sloupce $i_1, i_2, \dots i_r$, ve kterých

stojí vedoucí koeficient některého řádku.

Vybrané vektory jsou potom

$$u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} \sim \rightsquigarrow \sim \begin{array}{cccc} 1 & 2 & & 4 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ & \circ \\ 0 & 2 & \circ & \circ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vybereme u_1, u_2, u_4

Zdůvodnění na konkrétním příkladu

u_1, u_2, u_4 jsou LN $\quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_4 u_4 = 0$ vede na homogenní soustavu s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} u_1 & u_2 & u_4 & 0 \end{array}\right) \sim \xrightarrow[\text{úpravy}]{\text{stejné}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \circ & \circ & 0 \\ 0 & 2 & \circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow a_1 = a_2 = a_4 = 0$$

19

u_3 je lineární kombinací $u_1, u_2, \cancel{u_4}$ a proto

$$[u_1, u_2, u_4] = [u_1, u_2, u_3, u_4]$$

Řešíme rovnici

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cancel{a_4 u_4} = u_3$$

Taková rovnice vede na soustavu s maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} u_1 & u_2 & u_3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{úpravy}]{\text{stejné}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

U každé neznámé je vedoucí koeficient. Soustava má řešení, tedy

$$u_3 = a_1 u_1 + a_2 u_2.$$