Domácí úkol z 19. 10. 2015

Příklad 3. *V afinním prostoru je dáno 8 různých bodů A, B, C, D, K, L, M, N. Určete barycentrické souřadnice bodů K, L, M, N vzhledem k bodovému repéru $\{A, B, C, D\}$ (tyto body jsou v obecné poloze).*
$A = [3, 0, 0], B = [6, -5, 2], C = [4, 1, 3], D = [1, 1, 1]$,
$K = [20, -19, 2], L = [-12, 10, -10], M = [\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{2}{3}], N = [\frac{7}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$.

Řešení. Z definice barycentrických souřadnic hledáme koeficienty k_i, l_i, m_i, n_i takové, že budou platit následující rovnice:

$$\begin{aligned}
K &= k_1 A + k_2 B + k_3 C + k_4 D \\
L &= l_1 A + l_2 B + l_3 C + l_4 D \\
M &= m_1 A + m_2 B + m_3 C + m_4 D \\
N &= n_1 A + n_2 B + n_3 C + n_4 D
\end{aligned}$$

Dosazením všech známých souřadnic a vyjádřením jednotlivých rovnic dostaneme 4 soustavy tří rovnic, každá o čtyřech neznámých:

$$\begin{aligned}
20 &= 3k_1 + 6k_2 + 4k_3 + k_4 & -12 &= 3l_1 + 6l_2 + 4l_3 + l_4 \\
-19 &= \quad - 5k_2 + k_3 + k_4 & 10 &= \quad - 5l_2 + l_3 + l_4 \\
2 &= \quad + 2k_2 + 3k_3 + k_4 & -10 &= \quad + 2l_2 + 3l_3 + l_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} &= 3m_1 + 6m_2 + 4m_3 + m_4 & \tfrac{7}{2} &= 3n_1 + 6n_2 + 4n_3 + n_4 \\
\tfrac{7}{2} &= \quad - 5m_2 + m_3 + m_4 & -\tfrac{3}{4} &= \quad - 5n_2 + n_3 + n_4 \\
\tfrac{2}{3} &= \quad + 2m_2 + 3m_3 + m_4 & \tfrac{3}{2} &= \quad + 2n_2 + 3n_3 + n_4
\end{aligned}$$

Všimněme si, že možných řešení bude zdánlivě nekonečně mnoho. To ale není pravda – uvědomme si, že musí platit $\sum_{i=1}^4 k_i = \sum_{i=1}^4 l_i = \sum_{i=1}^4 m_i = \sum_{i=1}^4 n_i = 1$ (z definice). Proto můžeme vyjádřit např. čtvrtou souřadnici jako doplněk ostatních do jedničky (konkrétně třeba $k_4 = 1 - k_1 - k_2 - k_3$ apod.) a dosadit do rovnic. Poté dostaneme čtyři soustavy tří rovnic, každá o třech neznámých:

$$\begin{aligned}
19 &= 2k_1 + 5k_2 + 3k_3 & -13 &= 2l_1 + 5l_2 + 3l_3 \\
-20 &= -k_1 - 6k_2 & 9 &= -l_1 - 6l_2 \\
1 &= -k_1 + k_2 + 2k_3 & -11 &= -l_1 + l_2 + 2l_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2} &= 2m_1 + 5m_2 + 3m_3 & \tfrac{5}{2} &= 2n_1 + 5n_2 + 3n_3 \\
\tfrac{5}{2} &= -m_1 - 6m_2 & -\tfrac{7}{4} &= -n_1 - 6n_2 \\
-\tfrac{1}{3} &= -m_1 + m_2 + 2m_3 & \tfrac{1}{2} &= -n_1 + n_2 + 2n_3
\end{aligned}$$

Obdobně jako v prvním úkolu budeme řešit všechny čtyři soustavy najednou úpravou levého bloku následující matice na jednotkovou matici.

$$\left(\begin{array}{ccc||c|c|c|c} 2 & 5 & 3 & 19 & -13 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -1 & -6 & 0 & -20 & 9 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{4} \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -11 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc||c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

V pravém bloku vystupují ve sloupcích první tři barycentrické souřadnice bodů K, L, M, N. Čtvrtou souřadnici dopočítáme snadno doplněním do jedničky. Výsledek tedy vypadá následovně:

$$\begin{aligned} K &= \langle 2, 3, 0, -4 \rangle \\ L &= \langle 3, -2, -3, 3 \rangle \\ M &= \left\langle \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3} \right\rangle \\ N &= \left\langle \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4} \right\rangle \text{ – jedná se o těžiště čtyřstěnu } ABCD. \end{aligned}$$