Parciální diferenciální rovnice

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

Ústav matematiky a statistiky

Brno

28. prosince 2015

Obsah

Tento učební text vznikl jako studijní materiál k předmětu Parciální diferenciální rovnice a pokrývá všechny okruhy k ústní zkoušce. Části, které zkoušeny nebudou, jsou barevně odlišeny. Text je soupisem přednášek Michala Veselého. Do LaTeXu vysázel Dominik Velan; upravil Michal Veselý.

1 Úvod

1.1 Značení

V celém textu se používá následující značení:

$\mathbb{E}$	reálný (příp. komplexní) euklidovský prostor;
$\lvert\cdots\rvert$	norma v $\mathbb{E}^n$;
$\frac{\partial u}{\partial x_j} = u_{x_j} = \partial_{x_j} u$	parciální derivace funkce $u\colon \Omega \to \mathbb{E}$ podle x_j;
$\nabla u = D_u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}\right)$	gradient;
$\nabla \overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_s \end{pmatrix}$	pro vektorovou funkci $\overrightarrow{f} : \Omega \subseteq \mathbb{E}^r \to \mathbb{E}^s$, $\overrightarrow{f} = (f_1, \dots, f_s)^T$;
$\operatorname{div} \overrightarrow{f} = \sum_{j=1}^r \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = \nabla \cdot \overrightarrow{f}$	divergence vektorové funkce $\overrightarrow{f}$ pro $r = s$;
$\Delta u = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$	pro $u\colon \Omega \to \mathbb{E}$, kde $\Omega \subseteq \mathbb{E}^d$;
$\Delta \overrightarrow{f} = (\Delta f_1, \dots, \Delta f_s)^T$	pro vektorovou funkci $\overrightarrow{f}$;
$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, kde $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$	d-dimenzionální multiindex výšky (řádu) $\lvert\alpha\rvert = \sum_{j=1}^d \alpha_j$;
$D^\alpha u\,(x) = \frac{\partial^{\lvert\alpha\rvert} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$, $\lvert\alpha\rvert \le k$	derivace u v bodě x dle multiindexu α;
$D^k u\,(x) = \{D^\alpha u\,(x)\,; \lvert\alpha\rvert = k\}$	
$\lvert D^k\rvert = \sqrt{\sum_{\lvert\alpha\rvert=k} \lvert D^\alpha u\,(x)\rvert^2}$	
$D^\alpha \overrightarrow{f} = (D^\alpha f_1, \dots, D^\alpha f_s)^T$	
$D^k \overrightarrow{f} = \left\{D^\alpha \overrightarrow{f}; \lvert\alpha\rvert = k\right\}$	
$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}$	pro $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{E}^d$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$;
$\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_d!$	pro $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$;
$\alpha\,(n)$	objem n-dimenzionální jednotkové koule.

Doplňme, že

n	$\alpha\,(n)$
1	2
2	π
3	$\frac{4}{3}\pi$
n	$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$

pro

$$\Gamma\,(x) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t, \qquad x > 0,$$

přičemž

$$\Gamma\,(x+1) = x \cdot \Gamma\,(x)\,, \qquad x > 0$$

a

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

1.2 Základní definice

Definice. *Parciální diferenciální rovnicí* (PDE) rozumíme rovnici, která kromě neznámé funkce (alespoň dvou proměnných) obsahuje také její (parciální) derivace.

Poznámka. Nebude-li řečeno jinak, budeme pracovat v n-dimenzionálním euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Symboly U, V, W budou značit otevřené množiny v $\mathbb{R}^n$.

Definice. Nechť $F\colon \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$ je známá funkce. Rovnice

$$F\left(D^k u\left(x\right), D^{k-1} u\left(x\right), \ldots, Du\left(x\right), u\left(x\right), x\right) = 0 \tag{1.2.1}$$

pro $x \in U$, kde $u\colon U \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce, se nazývá (reálná) *parciální diferenciální rovnice* k*-tého řádu.*

Definice. Nechť $\vec{F}\colon \mathbb{R}^{m\cdot n^k} \times \mathbb{R}^{m\cdot n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m\cdot n} \times \mathbb{R}^m \times U \to \mathbb{R}^m$ je známé zobrazení. Rovnice

$$\vec{F}\left(D^k u\left(x\right), D^{k-1} u\left(x\right), \ldots, Du\left(x\right), u\left(x\right), x\right) = 0$$

pro $x \in U$, kde $u = \vec{u}\colon U \to \mathbb{R}^m$, $u\left(x\right) = \left(u_1\left(x\right), \ldots, u_m\left(x\right)\right)$ je neznámá vektorová funkce, se nazývá *systém parciálních diferenciálních rovnic* k-tého řádu.
PDE (1.2.1) se nazývá *lineární*, je-li F lineární ve všech proměnných, které zastupují funkci u, tj. pokud ji lze psát ve tvaru

$$\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha\left(x\right) D^\alpha u\left(x\right) = f\left(x\right)$$

pro jisté funkce a_α, f.
Je-li $f \equiv 0$, mluvíme o *homogenní lineární rovnici.*

Definice. Parciální diferenciální rovnice se nazývá *kvazilineární*, je-li funkce F lineární v těch derivacích $D^\alpha u$, kdy $|\alpha| = k$, tj. pokud ji lze psát jako

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha\left(D^{k-1}u\left(x\right), \ldots, Du\left(x\right), u\left(x\right), x\right)\cdot D^\alpha u\left(x\right) + a_0\left(D^{k-1}u\left(x\right), \ldots, Du\left(x\right), u\left(x\right), x\right) = 0.$$

PDE (1.2.1) se nazývá *nelineární*, pokud závisí nelineárně na parciálních derivacích u nejvyššího řádu.
Klasickým řešením PDE k-tého řádu se rozumí funkce $u\colon U \to \mathbb{R}$ splňující (1.2.1) pro všechna $x \in U$ a má spojité parciální derivace až do řádu k včetně, kdy píšeme $u \in C^k$, resp. $u \in C^k\left(U\right)$.

1.3 Příklady

- Lineární PDE:

Laplaceova rovnice	$\Delta u = 0;$
lineární transportní rovnice	$u_t + \sum_{i=1}^n b_i \cdot u_{x_i} = 0;$
rovnice vedení tepla	$u_t - \Delta u = 0;$
rovnice Schrödingerova	$\mathrm{i}u_t + \Delta u = 0;$
vlnová rovnice	$u_{tt} - \Delta u = 0;$
telegrafní rovnice	$u_{tt} + a \cdot u_t - u_{xx} = 0;$
rovnice příčných kmitů	$u_{tt} + u_{xxxx} = 0.$

- Kvazilineární a nelineární PDE:

obecná Poissonova rovnice	$-\Delta u = f(u);$
rovnice s p-laplaciánem	$\operatorname{div}\left(\lvert Du\rvert^{p-2}\cdot Du\right) = 0;$
eikonálová rovnice	$\lvert Du\rvert = 1;$
rovnice minimální plochy	$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+\lvert Du\rvert^2}}\right) = 1;$
Mongeova-Amperova rovnice	$\det\left(D^2 u\right) = 1;$
rovnice kontinuity	$u_t + \operatorname{div}\vec{F}(u) = 0;$
Hamiltonova-Jacobiho rovnice	$u_t + H(Du, x) = 0;$
Kortewegova-de Vriesova rovnice	$u_x + auu_x + u_{xxx} = 0.$

- Systémy PDE:

Maxwellovy
$$\begin{aligned}\vec{E}_t &= \vec{F}\left(\vec{B}\right),\\ \vec{B}_t &= -\vec{F}\left(\vec{E}\right),\\ \operatorname{div}\vec{E} &= 0,\\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0;\end{aligned}$$

Eulerovy
$$\begin{aligned}\vec{u}_t + \vec{u}D\vec{u} &= -Df,\\ \operatorname{div}\vec{u} &= 0;\end{aligned}$$

Navierovy-Stokesovy
$$\begin{aligned}\vec{u}_t + \vec{u}D\vec{u} - \Delta\vec{u} &= -Df,\\ \operatorname{div}\vec{u} &= 0.\end{aligned}$$

1.4 Klasifikace lineárních rovnic druhého řádu

Obecnou lineární rovnici 2. řádu v $\mathbb{R}^n$ lze zapsat jako

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + a(x)u(x) = f(x), \tag{1.4.1}$$

kde $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$. Výraz $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ se označuje jako hlavní část rovnice (1.4.1). Pro každé $x \in U$ dává hlavní část matici

$$A(x) = \left(a_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^{n}.$$

Lze požadovat, aby matice $A(x)$ byla symetrická.

Definice. Nechť $\lambda_i(x)$ pro $i \in \{1, \ldots, n\}$ jsou vlastní čísla symetrické matice hlavní části rovnice (1.4.1).
Jsou-li všechna čísla $\lambda_i(x)$ nenulová a stejného znaménka, rovnice (1.4.1) se nazývá *eliptická PDE*.
Jsou-li všechna čísla $\lambda_i(x)$ nenulová, ale ne všechna stejného znaménka, rovnice (1.4.1) se nazývá *hyperbolická PDE*.
Je-li alespoň jedno číslo $\lambda_i(x)$ nulové, rovnice (1.4.1) se nazývá *parabolická PDE*.

Příklad.

- *Laplaceova rovnice – eliptická.*
- *Vlnová rovnice – hyperbolická.*
- *Rovnice vedení tepla – parabolická.*

Poznámka. Typ rovnice se může měnit v závislosti na části definičního oboru, ve které rovnici zkoumáme. Například Tricomiho rovnice

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

je eliptická pro $y > 0$, parabolická pro $y = 0$ a hyperbolická pro $y < 0$.

1.5 Funkce s kompaktním nosičem

Je-li f spojitá funkce definovaná na topologickém prostoru X, pak jejím nosičem nazveme nejmenší uzavřenou množinu, vně které se f nuluje, tedy

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}}.$$

Je-li $\operatorname{supp} f$ kompaktní, řekneme, že funkce f je funkce s kompaktním nosičem. Označme

$$C_c(X) = \{f \in C(X);\ \operatorname{supp} f \text{ je kompaktní}\}.$$

Jako $C_0(X)$ označujeme množinu všech spojitých funkcí mizejících v nekonečnu, tj. spojitých funkcí f, pro které je množina $\{x \in X;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ kompaktní pro každé $\varepsilon > 0$. Zjevně je $C_0(X) \supseteq C_c(X)$.
Pokud je X Hausdorffův lokálně kompaktní topologický prostor, potom je $C_0(X)$ uzávěrem $C_c(X)$.

1.6 Několik poznatků z teorie integrálu

Definice. Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ je otevřená a ohraničená množina. Řekneme, že její *hranice ∂U je třídy C^k*, jestliže pro každý bod $x^0 \in \partial U$ existuje $r > 0$ a funkce $\gamma\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ třídy C^k taková, že (až na případnou permutaci souřadnic) platí

$$U \cap B\left(x^0, r\right) = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in B\left(x^0, r\right);\ x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\right\}$$

nebo

$$U \cap B\left(x^0, r\right) = \left\{x \in B\left(x^0, r\right);\ x_n < \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\right\}.$$

Řekneme, že *hranice ∂U je třídy C^∞*, je-li třídy C^k pro všechna $k \in \mathbb{N}$.
Řekneme, že *hranice ∂U je analytická*, tj. třídy C^ω, je-li zobrazení γ analytické.

Je-li hranice ∂U alespoň třídy C^1, pak je na ∂U definováno vektorové pole vnějších jednotkových normál, kdy $x \in \partial U$ přiřazujeme

$$x \mapsto \vec{v}(x) = \left(v^1(x), \ldots, v^n(x)\right) = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$$

nebo při jiném značení

$$x \mapsto \vec{n}(x) = \left(n^1(x), \ldots, n^n(x)\right) = (n_1(x), \ldots, n_n(x)).$$

Je-li $u \in C^1(\overline{U})$, potom definujeme normálovou derivaci u jako

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{v}} = \vec{v} \cdot Du$$

a při jiném značení jako

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \vec{n} \cdot Du.$$

Znalost parametrizace γ umožňuje v jistém okolí bodu x^0 hranici ∂U „napřímit“. To se děje pomocí transformace Φ, kdy $y_i = x_i$ pro $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $y_n = x_n - \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Protože $\det D\Phi(x) = 1$, existuje k této transformaci inverzní transformace Ψ, kdy $x_i = y_i$ pro $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ a $x_n = y_n + \gamma(y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Věta (Gaussova-Greenova)**.** *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a ohraničená množina s hranicí třídy C^1 a $u \in C^1(\overline{U})$. Potom platí*

$$\int\limits_U u_{x_i} \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial U} u n^i \,\mathrm{d}S$$

pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde n^i je i-tá složka jednotkového normálového vektoru $\vec{n}$.

Věta (Integrace per partes)**.** *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a ohraničená množina s hranicí třídy C^1 a $u, v \in C^1(\overline{U})$. Potom platí*

$$\int\limits_U u_{x_i} v \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial U} u v n^i \,\mathrm{d}S - \int\limits_U u v_{x_i} \,\mathrm{d}x$$

pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Věta (Greenovy identity)**.** *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a ohraničená množina s hranicí třídy C^1 a $u, v \in C^2(\overline{U})$. Potom platí:*

1. $$\int\limits_U \Delta u \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \,\mathrm{d}S;$$

2. $$\int\limits_U DuDv \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial U} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} u \,\mathrm{d}S - \int\limits_U u \Delta v \,\mathrm{d}x;$$

3. $$\int\limits_U u\Delta v - v\Delta u \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial U} u \cdot \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \,\mathrm{d}S.$$

Věta. *Nechť $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá a integrovatelná. Pak pro každé $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \left(\int_{\partial B(x_0, r)} f \,\mathrm{d}S \right) \mathrm{d}r.$$

Zvláště pro libovolné $r > 0$ je

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{B(x_0, r)} f \,\mathrm{d}x = \int_{\partial B(x_0, r)} f \,\mathrm{d}S.$$

Věta. *Nechť* $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je lipschitzovsky spojitá a pro skoro všechna* $r \in \mathbb{R}$ *je množina*

$$\{x \in \mathbb{R}^n;\, u(x) = r\}$$

analytická $(n-1)$*-dimenzionální hyperplocha v* $\mathbb{R}^n$*. Nechť je dále funkce* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *spojitá a integrovatelná. Potom platí*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,|Du(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\{x;\, u(x)=r\}} f\,\mathrm{d}S \right) \mathrm{d}r.$$

2 Transportní rovnice

Uvažujme rovnici

$$u_t + b \cdot Du = 0, \tag{2.1}$$

kde $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $u\colon \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce. Transportní rovnici (2.1) lze zapsat ve tvaru

$$(1,b) \cdot (u_t, Du) = (b,1) \cdot (Du, u_t) = 0,$$

tj. je-li u řešením (2.1), pak jeho směrová derivace ve směru vektoru $(b,1)$ je nulová. Zvolme libovolný (ale pevný) bod $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ a definujme funkci

$$z(s) = u(x + sb, t + s), \qquad s \geq -t.$$

Platí

$$z'(s) = Du(x + sb, t + s) \cdot b + u_t(x + sb, t + s), \qquad s > -t.$$

Ovšem $z'(s) = 0$ pro $s > -t$, neboť u je řešením rovnice (2.1). Tedy z je konstantní funkce, respektive u je konstantní na polopřímce určené bodem $(x - tb, 0)$ a směrovým vektorem $(b,1)$.

Uvažujme počáteční problém

$$\begin{aligned} u_t + b \cdot Du &= 0 \qquad \text{pro } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty); \\ u &= g \qquad \text{pro } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

kde $b \in \mathbb{R}^n$ a funkci $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ známe. Přímka jdoucí bodem (x,t) se směrovým vektorem $(b,1)$ má parametrické zadání $(x + sb, t + s)$, $s \in \mathbb{R}$. Tato přímka protne $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ v bodě $(x - tb, 0)$. Protože víme, že případné řešení je na této přímce konstantní a že

$$u(x - tb, 0) = g(x - tb),$$

dostáváme

$$u(x,t) = u(x - tb, 0) = g(x - tb), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0. \tag{2.3}$$

Pokud tedy počáteční problém (2.2) má dostatečně hladké řešení, pak toto řešení nutně splňuje (2.3). Především, je-li $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, pak pro funkci u zadanou pomocí (2.3) platí

$$u_t(x,t) + b \cdot Du(x,t) = -Dg(x - tb) \cdot b + b \cdot Dg(x - tb) = 0,$$

kde $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$, tj. u je řešením (2.2).

Stejným způsobem řešme přidružený problém

$$\begin{aligned} u_t + b \cdot Du &= f, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty); \\ u &= g, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Zvolme pevně bod $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ a položme

$$z(s) = u(x + sb, t + s).$$

Platí
$$z'(s) = Du(x+sb, t+s) \cdot b + u_t(x+sb, t+s) = f(x+sb, t+s)$$
a dále
$$u(x,t) - g(x-tb) = z(0) - z(-t) = \int\limits_{-t}^{0} z'(s)\, \mathrm{d}s =$$
$$= \int\limits_{-t}^{0} f(x+sb, t+s)\, \mathrm{d}s = \int\limits_{0}^{t} f(x+(\xi-t)\cdot b, \xi)\, \mathrm{d}\xi, \qquad \xi = s+t.$$
Řešením (2.4) by tedy mohla být funkce
$$u(x,t) = g(x-tb) + \int\limits_{0}^{t} f(x+(\xi-t)\cdot b, \xi)\, \mathrm{d}\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0.$$
Přímým výpočtem lze ukázat, že za obdobných předpokladů na hladkost jako v předchozím případě je tato funkce u řešením (2.4).

V rychlosti se analogicky podívejme na následující problém

$$\begin{aligned} u_t + b \cdot Du + c \cdot u &= 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty); \\ u &= g, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \{t=0\}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

kde navíc $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Uvážením
$$cu = -(1,b)\cdot(u_t, Du) = -(Du, u_t)(b,1)$$
zaveďme funkci
$$z(s) = u(x+sb, t+s).$$
Derivováním dostaneme
$$z'(s) = Du(x+sb, t+s)\cdot b + u_t(x+sb, t+s) = (b,1)\cdot(Du, u_t),$$
a tedy
$$z'(s) + cz(s) = 0.$$
To je ODR s řešením
$$z(s) = z(0)\cdot e^{-cs},$$
tj.
$$u(x+sb, t+s) = u(x,t)\, e^{-cs}.$$
Položme $s = -t$ a využijme počáteční podmínky
$$g(x-tb) = u(x-tb, 0) = u(x,t)\, e^{ct}.$$
Proto funkce
$$u(x,t) = g(x-tb)\, e^{-ct}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0$$
by mohla být řešením (2.5). Znovu přímým výpočtem lze ověřit, že za předpokladu $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ řešením tato funkce skutečně je.

3 Metoda separace proměnných

Podstatou této metody je hledání řešení dané PDE ve tvaru „vhodné kombinace“ funkcí menšího počtu proměnných (obvykle ve tvaru součtu či součinu), které lze stanovit dosazením do zadané PDE (případně využitím podmínek řešené úlohy).

Příklad. *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a ohraničená množina (s analytickou hranicí). Uvažujme počáteční okrajový problém pro rovnici vedení tepla ve tvaru*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, && \text{na } U \times (0,\infty)\,; \\ u &= 0, && \text{na } \partial U \times (0,\infty)\,; \\ u &= g, && \text{na } U \times \{t=0\}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde $g\colon U \to \mathbb{R}$ je známá funkce.

Předpokládejme, že existuje řešení problému (3.1) ve tvaru

$$u\,(x,t) = v\,(x) \cdot w\,(t)\,, \qquad x \in \overline{U},\ t \in [0,\infty). \tag{3.2}$$

Musí platit

$$\begin{aligned} u_t\,(x,t) &= v\,(x)\, w'\,(t)\,, \\ \Delta u\,(x,t) &= \Delta v\,(x) \cdot w\,(t)\,, \\ 0 = u_t\,(x,t) - \Delta u\,(x,t) &= v\,(x) \cdot w'\,(t) - \Delta v\,(x) \cdot w\,(t) \end{aligned}$$

pro $x \in U$, $t > 0$. To lze pro všechna uvažovaná x, t taková, že $v\,(x) \cdot w\,(t) \neq 0$, zapsat jako

$$\frac{\Delta v\,(x)}{v\,(x)} = \frac{w'\,(t)}{w\,(t)}. \tag{3.3}$$

Proměnné x, t jsou separované a nezávislé, což je možné jen tak, že obě strany (3.3) jsou rovny jisté konstantě, tj.

$$\frac{\Delta v\,(x)}{v\,(x)} = \mu = \frac{w'\,(t)}{w\,(t)}, \qquad x \in U,\ t > 0,\ v\,(x) \cdot w\,(t) \neq 0,$$

a dostáváme

$$w'\,(t) = \mu \cdot w\,(t)\,, \qquad t > 0, \tag{3.4}$$

$$\Delta v\,(x) = \mu \cdot v\,(x)\,, \qquad x \in U. \tag{3.5}$$

Obecné řešení rovnice (3.4) je

$$w\,(t) = c \cdot e^{\mu t}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Funkci v lze získat jako netriviální řešení okrajové úlohy

$$\begin{aligned} \Delta v\,(x) + \lambda v\,(x) &= 0, && \text{na } U; \\ v\,(x) &= 0, && \text{na } \partial U. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Úloha (3.6) se nazývá Sturmova-Liouvilleova úloha. *Za jistých předpokladů je tato úloha řešitelná pro nejvýše spočetnou množinu čísel λ (tzv. vlastních čísel). Jim odpovídající netriviální řešení se nazývají vlastní funkce.*

Odbočka. Uvažujme problém tzv. vlastních čísel a vlastních funkcí pro eliptické symetrické operátory, tj. $Lv = \lambda v$ na U, $v = 0$ na ∂U, kde U je otevřená a ohraničená množina v $\mathbb{R}^n$. Nechť

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} u_{x_i}\right)_{x_j}, \quad a_{ij} \in C^\infty(\overline{U}), \quad a_{ij} = a_{ji} \ \text{ pro } i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$$

a platí tzv. *podmínka elipticity*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2$$

pro jisté $\theta > 0$, pro všechna $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ a uvažovaná x.

Výsledky: Všechna vlastní čísla jsou reálná, vlastních čísel je spočetně mnoho, lze je seřadit do neklesající posloupnosti $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, kdy je $\lambda_1 > 0$, $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = \infty$.

Je-li λ vlastní číslo a v jemu odpovídající vlastní funkce, pak pro

$$u(x,t) = c \cdot e^{-\lambda t} v(x), \qquad c \in \mathbb{R},\ t \geq 0,\ x \in \overline{U} \tag{3.7}$$

platí

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= 0 \qquad \text{na } U \times (0,\infty); \\ u(x,t) &= 0 \qquad \text{na } \partial U \times (0,\infty); \\ u(x,0) &= c \cdot v(x), \end{aligned}$$

tj. funkce u definovaná ve (3.7) je řešením úlohy (3.1), pokud lze zvolit konstantu c tak, aby platilo, že $c \cdot v(x) = g(x)$ pro $x \in U$. To je však výjimečný případ. Uvažujme vlastní funkce v_k pro $k \in \mathbb{N}$. Pro vhodné konstanty c_k by mohlo platit

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot v_k(x) = g(x), \qquad x \in U, \tag{3.8}$$

přičemž konvergence je stejnoměrná. Ze (3.1) plyne, že funkce

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-\lambda_k t} v_k(x), \qquad t \geq 0,\ x \in \overline{U} \tag{3.9}$$

pak bude řešením problému (3.1).

Poznámka. Doplňme následující komentáře.

1. Metoda separace proměnných dává pouze funkci ve (3.7). Formule (3.8) a (3.9) plynou z uvažované podmínky $u = g$ na $U \times \{t = 0\}$.

2. Určení konstant c_k je úloha z teorie obecných Fourierových řad.

3. Nalezení vlastních čísel a vlastních funkcí může být značně náročné.

Příklad. *Nalezněte nějaké nelineární řešení rovnice*

$$(u_x)^2\, u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + (u_y)^2\, u_{yy} = 0.$$

Položme

$$u\,(x,y) = v\,(x) + w\,(y)\,.$$

Platí

$$\begin{gathered}
(v_x)^2\, v_{xx} + (w_y)^2\, w_{yy} = 0, \\
(v_x)^3_x + (w_y)^3_y = 0, \\
(v_x)^3_x = \mu = -\,(w_y)^3_y\,, \\
v_x^3 = \mu x + c, \qquad w_y^3 = -\mu y + d, \\
v_x = \sqrt[3]{\mu x + c}, \qquad w_y = \sqrt[3]{-\mu y + d}, \\
v = \frac{3}{4\mu}\,(\mu x + c)^{\frac{4}{3}} + C, \qquad w = -\frac{3}{4\mu}\,(-\mu y + d)^{\frac{4}{3}} + D.
\end{gathered}$$

Celkem

$$u\,(x,y) = \frac{3}{4\mu}\left[\sqrt[3]{(c+\mu x)^4} - \sqrt[3]{(d-\mu y)^4}\right] + E.$$

Přímo lze ověřit, že kupř. funkce

$$u\,(x,y) = (c+x)^{\frac{4}{3}} - (d-y)^{\frac{4}{3}}$$

jsou řešeními.

Poznámka. Podobně lze nalézt např. řešení ve tvaru

$$u\,(x,t) = w\,(x) + v\,(t)$$

pro Hamiltonovu-Jacobiho rovnici.

4 Cauchyova-Kovalevské věta

Uvažujme kvazilineární PDE k-tého řádu v $\mathbb{R}^n$ ve tvaru

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha\left(D^{k-1}u,\ldots,Du,u,x\right)D^\alpha u + a_0\left(D^{k-1}u,\ldots,Du,u,x\right) = 0 \tag{4.1}$$

spolu s Cauchyovými podmínkami zadanými na hyperrovině $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n;\, x_n = 0\}$ ve tvaru

$$u = g_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = g_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_n^{k-1}} = g_{k-1}. \tag{4.2}$$

Problém: Lze na Γ určit nějaké další hodnoty derivací řešení u, které nejsou obsaženy ve (4.2)?

Protože je Γ nadrovina, obsahuje s každým bodem x také bod $x+e_i$ pro $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$. To znamená, že pro $x \in \Gamma$ a $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ platí

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g_0(x+he_i)-g_0(x)}{h} = \frac{\partial g_0(x)}{\partial x_i}.$$

Hodnotu $\frac{\partial u}{\partial x_n}$ nelze takto určit. Známe ji ale ze (4.2), tj. $\frac{\partial u}{\partial x_n} = g_1$. Na Γ lze tedy stanovit Du. Podobně pro každé $x \in \Gamma$ platí

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} \frac{\partial^2 g_0(x)}{\partial x_i \partial x_j}, & i,j \in \{1,2,\ldots,n-1\}; \\ \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_j}, & i = n,\ j \in \{1,2,\ldots,n-1\}; \\ g_2(x), & i = j = n. \end{cases}$$

To znamená, že na Γ lze určit také D^2u. Podobným způsobem dostaneme, že na Γ lze určit celkem $Du, D^2u, \ldots, D^{k-1}u$. Komplikace nastane při výpočtu D^ku, kdy již nelze použít (4.2) k výpočtu hodnoty $\frac{\partial^k u(x)}{\partial x_n^k}$. Využijeme toho, že u je řešením (4.1). Za předpokladu, že koeficient $a_{(0,0,\ldots,k)}(-)$ ve (4.1) je nenulový, lze psát

$$\frac{\partial^k u(x)}{\partial x_n^k} = \frac{-1}{a_{(0,0,\ldots,k)}(-)}\left[\sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha\neq(0,0,\ldots,k)}} a_\alpha(-)\,D^\alpha u + a_0(-)\right]. \tag{4.3}$$

Protože pro $x \in \Gamma$ známe všechny hodnoty na pravé straně (4.3), lze určit hodnotu $\frac{\partial^k u(x)}{\partial x_n^k}$, tedy také D^ku.

Pokud je podmínka

$$a_{(0,0,\ldots,k)}(\xi) \neq 0 \tag{4.4}$$

splněna pro libovolné hodnoty argumentu ξ, řekneme, že $\Gamma = \{x_n = 0\}$ je *necharakteristická*. Známe-li pro libovolné $x \in \Gamma$ hodnotu $\frac{\partial^k u(x)}{\partial x_n^k}$, můžeme definovat funkci

$$g_k\colon x \mapsto \frac{\partial^k u(x)}{\partial x_n^k}, \quad x \in \Gamma.$$

Touto funkcí lze doplnit (4.2) a pak pomocí (4.2) získat pro libovolné $x \in \Gamma$ všechny parciální derivace $D^{k+1}u\,(x)$, avšak kromě $\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x_n^{k+1}}$. Tuto parciální derivaci obdržíme derivováním (4.1) podle x_n, kdy

$$\frac{\partial^{k+1}u\,(x)}{\partial x_n^{k+1}} = \frac{-1}{a_{(0,0,\ldots,k)}\,(-)}\,[\cdots]\,.$$

To nám umožní najít $D^{k+1}u\,(x)$, $x \in \Gamma$. Takto lze stanovit všechny parciální derivace řešení Cauchyovy úlohy (4.1), (4.2) na Γ při hladkosti uvažovaných koeficientů a_α, funkcí g_i a řešení u.
Podobné úvahy lze provést pro libovolnou dostatečně hladkou hyperplochu Γ, kde Cauchyova podmínka (4.2) je nahrazena za podmínku

$$u = g_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{k-1}u}{\partial \vec{n}^{k-1}} = g_{k-1} \quad \text{na } \Gamma, \tag{4.5}$$

kde g_i jsou známé funkce a

$$\frac{\partial^i u}{\partial \vec{n}^i} = \sum_{|\alpha|=i} D^\alpha u \vec{n}^\alpha = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=i} \frac{\partial^i u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\, n_1^{\alpha_1}\cdots n_n^{\alpha_n}$$

je i-tá normálová derivace funkce u. Hyperplocha Γ se nazývá *necharakteristická*, jestliže (viz (4.4))

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha n^\alpha \neq 0 \qquad \text{na } \Gamma.$$

Také pro obecnou necharakteristickou hyperbolu Γ lze úvahy o určení $D^i u\,(x)$ na Γ opakovat. Navíc se použije pouze napřímení hyperplochy Γ. Tímto dostáváme:

Věta (Cauchyovo-Kovalevské lemma)**.** *Nechť u je hladké řešení rovnice* (4.1)*, které na necharakteristické hyperploše $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ splňuje Cauchyovy podmínky* (4.5)*. Libovolnou parciální derivaci u na Γ lze vyjádřit pomocí funkcí $g_0, g_1, \ldots, g_{k-1}$, koeficientů a_α pro $|\alpha| = k$ a a_0.*

Předpokládejme, že je dána kvazilineární PDE (4.1) s analytickými Cauchyho daty (4.5), která platí na analytické necharakteristické hyperploše Γ. Navíc lze předpokládat, že všechna Cauchyho data jsou identicky nulová a že $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n;\, x_n = 0\}$. Lze dokázat, že tento předpoklad je bez újmy na obecnosti. Tím se úloha (4.1), (4.5) převede na tvar

$$\begin{gathered} \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \left(D^{k-1}u, \ldots, Du, u, x\right) D^\alpha u + a_0 \left(D^{k-1}u, \ldots, Du, u, x\right) = 0, \\ u = \frac{\partial u}{\partial x_n} = \cdots = \frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_n^{k-1}} = 0, \qquad x_n = 0. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Úlohu (4.6) nahradíme úlohou pro systém rovnic prvního řádu

$$\begin{gathered} \vec{u}_{x_n} = \sum_{j=1}^{n-1} \overrightarrow{B_j}\,(\vec{u}, x)\,\vec{u}_{x_j} + \vec{c}\,(\vec{u}, x)\,, \quad |x| < r, \\ \vec{u} = 0, \quad x_n = 0, \quad \vec{u} = \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^{k-1}u}{\partial x_n^{k-1}}\right). \end{gathered} \tag{4.7}$$

Věta (Cauchyova-Kovalevské)**.** *Nechť v úloze* (4.7) *jsou $\overrightarrow{B_j}$ pro všechna uvažovaná j a $\vec{C}$ analytické. Potom existuje $r > 0$ a analytická funkce $\vec{u}$, která je řešením* (4.7)*.*

5 Rovnice prvního řádu

PDE prvního řádu má tvar

$$F(Du, u, x) = 0,$$

kde $x \in U$ pro jistou otevřenou množinu $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$ je známá funkce a $u\colon \overline{U} \to \mathbb{R}$ je hledaná funkce. Označme

$$F = F(p, z, x) = F(p_1, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n),$$

kde $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$. Dále označme

$$D_p F = (F_{p_1}, F_{p_2}, \ldots, F_{p_n}), \quad D_z F = F_z, \quad D_x F = (F_{x_1}, F_{x_2}, \ldots, F_{x_n}).$$

5.1 Metoda charakteristik

Uvažujme rovnici

$$F(Du, u, x) = 0 \quad \text{na } U \tag{5.1.1}$$

spolu s okrajovou podmínkou

$$u = g \quad \text{na } \Gamma, \tag{5.1.2}$$

kde $\Gamma \subseteq \partial U$ a $g\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ je daná funkce. Nechť F a g jsou dostatečně hladké funkce. Metoda charakteristik řeší úlohu (5.1.1), (5.1.2) tak, že ji převádí na řešení počáteční úlohy pro systém ODE. Předpokládejme, že (5.1.1), (5.1.2) má řešení u. Zvolme libovolně bod $x \in U$. Nechť jsme schopni určovat hodnoty u na jistých křivkách ležících v $\overline{U}$. Nechť jedna taková křivka prochází právě bodem $x = \vec{x}(1)$ a současně bodem $x^0 = \vec{x}(0) \in \Gamma$. Protože známe hodnoty funkce u na Γ, je jistá možnost, že určíme u podél $\vec{x}$.

Uvažujme, že uvedená křivka bude popsána jako

$$\vec{x}(s) = \left(x^1(s), x^2(s), \ldots, x^n(s)\right) = (x_1(s), x_2(s), \ldots, x_n(s)),$$

kde s je parametr z jistého subintervalu reálné osy, a že u je třídy C^2. Na křivce $\vec{x}$ definujme

$$z(s) = u(\vec{x}(s)), \tag{5.1.3}$$

$$\vec{p}(s) = Du(\vec{x}(s)). \tag{5.1.4}$$

Podrobněji psáno,

$$\vec{p}(s) = \left(p^1(s), \ldots, p^n(s)\right) = (p_1(s), \ldots, p_n(s)),$$

kde

$$p_i(s) = u_{x_i}(\vec{x}(s)), \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{5.1.5}$$

Problém zůstává, jak můžeme najít takovou křivku $\vec{x}$, abychom byli schopni hodnoty z a p určit. Derivováním (5.1.5) dostáváme

$$[p_i(s)]' = \sum_{j=1}^{n} u_{x_i x_j}(\vec{x}(s)) \cdot \left[x^j(s)\right]'. \tag{5.1.6}$$

Současně derivováním (5.1.1) podle x_i na křivce $\vec{x}$ získáváme

$$
\begin{aligned}
&D_{x_i}F\left(Du\left(x\right),u\left(x\right),x\right)= \\
&=D_{x_i}F\left(u_{x_1}\left(x_1,\dots,x_n\right),\dots,u_{x_n}\left(x_1,\dots,x_n\right),u\left(x_1,\dots,x_n\right),x_1,\dots,x_n\right)= \\
&=D_{x_i}F\left(p_1,\dots,p_n,z,x\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_j}\left(Du,u,x\right)u_{x_ix_j}+\frac{\partial F}{\partial z}\left(Du,u,x\right)u_{x_i}+\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(Du,u,x\right)=0.
\end{aligned}
$$

To lze na $\vec{x}$ zapsat jako

$$
\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_j}\left(\vec{p},z,\vec{x}\right)u_{x_ix_j}\left(\vec{x}\right)+\frac{\partial F}{\partial z}\left(\vec{p},z,\vec{x}\right)u_{x_i}\left(\vec{x}\right)+\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\vec{p},z,\vec{x}\right)=0, \tag{5.1.7}
$$

kde $\vec{p}=\vec{p}\left(s\right)$, $z=z\left(s\right)$ a $\vec{x}=\vec{x}\left(s\right)$.

Kdyby navíc platilo

$$
\left[x^j\left(s\right)\right]'=\frac{\partial F}{\partial p_j}\left(\vec{p}\left(s\right),z\left(s\right),\vec{x}\left(s\right)\right),\quad j\in\{1,2,\dots,n\}, \tag{5.1.8}
$$

tak by bylo možné vyjádřit (5.1.6) pomocí (5.1.5), (5.1.7) a (5.1.8) jako

$$
\left[p^i\left(s\right)\right]'=-\frac{\partial F}{\partial z}\left(\vec{p}\left(s\right),z\left(s\right),\vec{x}\left(s\right)\right)p^i\left(s\right)-\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\vec{p}\left(s\right),z\left(s\right),\vec{x}\left(s\right)\right),\quad i\in\{1,2,\dots,n\}.
$$

To je systém n ODE pro $2n+1$ neznámých. Dalších n rovnic získáme z (5.1.8) a poslední rovnici získáme derivováním $z\left(s\right)=u\left(\vec{x}\left(s\right)\right)$ (viz (5.1.3)) jako

$$
z'\left(s\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}\left(\vec{x}\left(s\right)\right)\cdot\left[x^j\left(s\right)\right]'=\sum_{j=1}^{n}p^j\left(s\right)\cdot\frac{\partial F}{\partial p_j}\left(\vec{p}\left(s\right),z\left(s\right),\vec{x}\left(s\right)\right).
$$

Získaný systém $2n+1$ ODE prvního řádu ve tvaru

$$
\begin{aligned}
\left[\vec{p}\left(s\right)\right]'&=-D_xF\left(\vec{p}\left(s\right),z\left(s\right),\vec{x}\left(s\right)\right)-D_zF\left(\vec{p}\left(s\right),z\left(s\right),\vec{x}\left(s\right)\right)\cdot\vec{p}\left(s\right), \\
z'\left(s\right)&=D_pF\left(\vec{p}\left(s\right),z\left(s\right),\vec{x}\left(s\right)\right)\cdot\vec{p}\left(s\right), \\
\left[\vec{x}\left(s\right)\right]'&=D_pF\left(\vec{p}\left(s\right),z\left(s\right),\vec{x}\left(s\right)\right)
\end{aligned} \tag{5.1.9}
$$

je tvořen tzv. *charakteristickými rovnicemi* (nelineární) PDE (5.1.1). Řešení systému (5.1.9) se nazývají *charakteristiky*.

Shrnutí: Hledáme křivky zvané *charakteristiky*, a to spočívá v řešení jisté soustavy ODE. Podél těchto křivek PDE přechází na ODE.

Příklad. *Uvažujme nelineární okrajovou úlohu*

$$
\begin{aligned}
u_{x_1}u_{x_2}&=u, &&\text{na } U=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\ x_1>0\}; \\
u&=x_2^2, &&\text{na } \Gamma=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\ x_1=0\}.
\end{aligned}
$$

Přepíšeme rovnici do tvaru

$$
F\left(p,z,x\right)=p_1p_2-z.
$$

Systém (5.1.9) *je tvaru*

$$\begin{aligned} x_1' &= p_2, \\ x_2' &= p_1, \\ p_1' &= p_1, \\ p_2' &= p_2, \\ z' &= 2p_1p_2. \end{aligned}$$

Řešení je

$$\begin{aligned} p_1(s) &= p_0^1 \mathrm{e}^s, & p_0^1 &= \frac{x_0}{2}, \\ p_2(s) &= p_0^2 \mathrm{e}^s, & p_0^2 &= 2x_0, \\ z(s) &= z_0 + p_0^1 p_0^2 \left(\mathrm{e}^{2s} - 1\right), & z_0 &= (x_0)^2, \\ x_1(s) &= x_0^1 + p_0^2 (\mathrm{e}^s - 1), & x_0^1 &= 0, \\ x_2(s) &= x_0^2 + p_0^1 (\mathrm{e}^s - 1), & x_0^2 &= x_0. \end{aligned}$$

Protože potřebujeme, aby pro $s = 0$ *bylo* $(x_1(s), x_2(s)) \in \Gamma$, *je třeba položit*

$$x_0^1 = 0, \qquad x_0^2 = x_0 \in \mathbb{R}.$$

Ze $z(s) = u(\vec{x}(s))$ *dostáváme pro* $s = 0$, *že*

$$(x_0)^2 = u(\vec{x}_0) = z(0) = z_0 + p_0^1 p_0^2 \left(\mathrm{e}^0 - 1\right) = z_0.$$

Zbývá určit hodnoty p_0^1 *a* p_0^2, *přičemž* $p_i(s) = u_{x_i}(\vec{x}(s))$. *Odtud pro* $s = 0$ *plyne*

$$p_0^2 = p_2(0) = u_{x_2}(0, x_0) = \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2)^2 |_{x_2 = x_0} = 2x_0.$$

Z analogické rovnice pro p_1 *nelze odvodit hodnotu* p_0^1 *(nejsme na hranici* U*). Platí však*

$$p_1(s) p_2(s) = u_{x_1}(\vec{x}(s)) u_{x_2}(\vec{x}(s)) = u(\vec{x}(s))$$

dle zadání úlohy. Dosazením $s = 0$ *dostáváme*

$$p_0^1 p_0^2 = z_0 = (x_0)^2, \qquad p_0^1 = \frac{x_0}{2}.$$

Řešení (5.1.9) *lze tedy zapsat jako*

$$\begin{aligned} x_1(s) &= 2x_0 (\mathrm{e}^s - 1), \\ x_2(s) &= \frac{x_0}{2} (\mathrm{e}^s + 1), \\ z(s) &= (x_0)^2 \mathrm{e}^{2s}, \\ p_1(s) &= \frac{x_0}{2} \mathrm{e}^s, \\ p_2(s) &= 2x_0 \mathrm{e}^s. \end{aligned}$$

Zvolme libovolně bod $(x_1, x_2) \in U$*. Pokud existuje* $x_0 \in \mathbb{R}$ *a* $s > 0$ *tak, že*

$$(x_1, x_2) = (x_1(s), x_2(s)) = \left(2x_0(\mathrm{e}^s - 1), \frac{x_0}{2}(\mathrm{e}^s + 1)\right),$$

je nutně

$$x_0 = \frac{4x_2 - x_1}{4}, \qquad \mathrm{e}^s = \frac{4x_2 + x_1}{4x_2 - x_1}.$$

Pro tato x_0, s *je*

$$u(x_1, x_2) = u(x_1(s), x_2(s)) = z(s) = (x_0)^2 \mathrm{e}^{2s} = \left(\frac{4x_2 - x_1}{4} \cdot \frac{4x_2 + x_1}{4x_2 - x_1}\right)^2 = \frac{(x_1 + 4x_2)^2}{16}.$$

Lze ověřit, že se jedná o řešení.

5.2 Homogenní lineární rovnice

Homogenní lineární rovnice je tvaru

$$\vec{b}(x)\, Du(x) + c(x)\, u(x) = 0 \quad \text{na } U, \tag{5.2.1}$$

tj.

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x_1, \ldots, x_n)\, u = 0.$$

Nyní je

$$F(p, z, x) = \vec{b}(x) \cdot p + c(x) \cdot z,$$

a tudíž

$$D_p F(p, z, x) = \vec{b}(x).$$

Charakteristické rovnice jsou proto

$$\begin{aligned} [\vec{x}(s)]' &= \vec{b}(\vec{x}(s)), \\ z'(s) = \vec{b}(\vec{x}(s)) \cdot \vec{p}(s) &= -c(\vec{x}(s)) \cdot z(s). \end{aligned}$$

V tomto případě rovnice pro p nejsou potřeba a charakteristický systém je právě

$$\begin{aligned} [\vec{x}(s)]' &= \vec{b}(\vec{x}(s)), \\ z'(s) &= -c(\vec{x}(s)) \cdot z(s). \end{aligned}$$

Příklad. *Řešme okrajovou úlohu*

$$\begin{aligned} x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} &= u \qquad \text{na } U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\, x_1 > 0,\, x_2 > 0\}; \\ u &= g \qquad \text{na } \Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\, x_1 > 0,\, x_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Rovnice uvažované úlohy je tvaru (5.2.1) *pro* $\vec{b}(x) = (-x_2, x_1)$, $c = -1$.

Charakteristický systém rovnic je

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2, \\ x_2' &= x_1, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Nalezneme řešení $\vec{x}$ pro $s = 0$ procházející bodem $(x_1^0, 0) \in \Gamma$, kdy

$$\vec{x}(s) = (x_1(s), x_2(s)) = \left(x_1^0 \cos s, x_1^0 \sin s\right).$$

Podobně se vidí, že

$$z(s) = z^0 \mathrm{e}^s = u\left(x_1^0, 0\right) \mathrm{e}^s = g\left(x_1^0\right) \mathrm{e}^s.$$

Ukážeme, že jsme schopni pomocí trajektorií dostat se do celého U. Zvolme libovolně bod $(x_1, x_2) \in U$. Pak existuje právě jedno $x_1^0 > 0$ a právě jedno $s \in (0, \pi/2)$ tak, že

$$(x_1, x_2) = (x_1(s), x_2(s)) = \left(x_1^0 \cos s, x_1^0 \sin x\right).$$

Očividně je

$$x_1^0 = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}, \qquad s = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}.$$

Celkem

$$u(x_1, x_2) = u(x_1(s), x_2(s)) = z(s) = g\left(x_1^0\right) \mathrm{e}^s = g\left(\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}\right) \mathrm{e}^{\operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}}.$$

Lze snadno ověřit, že jde o řešení zadaného problému, když $g \in C^1(\mathbb{R}^+)$.

Poznámka. Nechť je $c \equiv 0$. Potom je každá funkce u, která je řešením (5.2.1), konstantní podél charakteristik. Obráceně, rovnici (5.2.1) vyhovuje každá funkce u třídy C^1, která je konstantní podél všech charakteristik.

5.3 Kvazilineární rovnice

Kvazilineární rovnice prvního řádu je tvaru

$$\vec{b}(x, u(x)) Du(x) + c(x, u(x)) = 0 \quad \text{na } U, \tag{5.3.1}$$

tj.

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0 \quad \text{na } U.$$

Nyní je

$$F(p, z, x) = \vec{b}(x, z) \cdot p + c(x, z),$$

a tedy

$$D_p F(p, z, x) = \vec{b}(x, z).$$

Charakteristické rovnice tak jsou

$$\begin{aligned} [\vec{x}(s)]' &= \vec{b}(\vec{x}(s), z(s)), \\ z'(s) &= \vec{b}(\vec{x}(s), z(s)) \cdot \vec{p}(s) = -c(\vec{x}(s), z(s)). \end{aligned}$$

Znovu se charakteristické rovnice pro $\vec{p}$ neuplatní, a proto je celý charakteristický systém (5.3.1) tvaru

$$\begin{aligned} [\vec{x}(s)]' &= \vec{b}(\vec{x}(s), z(s)), \\ z'(s) &= -c(\vec{x}(s), z(s)). \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Příklad. *Najděte řešení okrajové úlohy*

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = u^2 \qquad \text{na } U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_2 > 0\};$$
$$u = g \qquad \text{na } \Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_2 = 0\}.$$

Rovnice této úlohy je tvaru (5.3.1) pro $\overrightarrow{b}(x,u) = (1,1)$, $c = -u^2$. *Charakteristický systém je*

$$\begin{aligned} x_1' &= 1, \\ x_2' &= 1, \\ z' &= z^2. \end{aligned}$$

Řešení charakteristického systému, které pro $s = 0$ *nabývá hodnoty* $(x^0, 0) \in \Gamma$, *je*

$$\begin{aligned} x_1(s) &= x^0 + s, \\ x_2(s) &= s. \end{aligned}$$

Dále

$$\frac{1}{z(0)} - \frac{1}{z(s)} = s.$$

Je tedy

$$z(s) = \frac{z_0}{1 - sz(0)} = \frac{u(x^0, 0)}{1 - su(x^0, 0)} = \frac{g(x_0)}{1 - sg(x^0)}, \qquad \text{pokud} \quad sg(x^0) \neq 1.$$

Opět ověřujeme, zda pokryjeme celé U. *Zvolme proto* $(x_1, x_2) \in U$ *libovolně. Pak existuje právě jedno* $x^0 \in \mathbb{R}$ *a právě jedno* $s > 0$ *tak, že* $(x_1, x_2) = (x_0 + s, s)$. *Zřejmě* $s = x_2$, $x^0 = x_1 - x_2$. *Celkem*

$$u(x_1, x_2) = u(x_1(s), x_2(s)) = z(s) = \frac{g(x^0)}{1 - sg(x^0)} = \frac{g(x_1 - x_2)}{1 - x_2 g(x_1 - x_2)},$$

pokud $1 \neq x_2 g(x_1 - x_2)$. *Lze ověřit, že jde o řešení, když* $g \in C^1(\mathbb{R})$.

6 Metoda Fourierovy transformace

6.1 Konvoluce

Nechť funkce f a g jsou měřitelné na $\mathbb{R}^n$. *Konvolucí* těchto funkcí nazýváme funkci $f * g$ definovanou jako

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \cdot g(y) \, \mathrm{d}y$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$, pro která integrál na pravé straně existuje.

Věta. *Pokud všechny uvažované integrály existují, pak platí:*

(a) $f * g \equiv g * f$*;*

(b) $(f * g) * h \equiv f * (g * h)$*;*

(c) je-li pro $z \in \mathbb{R}^n$ *zobrazení* τ_z *translace, která přiřadí funkci* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funkci* $\tau_z f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, kde* $\tau_z f(x) = f(x-z)$*,* $x \in \mathbb{R}^n$*, pak* $\tau_z(f * g) \equiv (\tau_z f) * g \equiv f * (\tau_z g)$*;*

(d) $\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \overline{(\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g)}$.

Důkaz. Platí:

(a)

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \, g(y) \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \, g(x-z) \, \mathrm{d}z = (g * f)(x) \, .$$

(b)

$$[(f * g) * h](x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(y) \, h(x-y) \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z) \, g(y-z) \, \mathrm{d}z \right) h(x-y) \, \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z) \, g(y-z) \, h(x-y) \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z) \, g(y-z) \, h(x-y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \, h(x-z-\xi) \, \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \, (g * h)(x-z) \, \mathrm{d}z = [f * (g * h)](x) \, .$$

(c)

$$[\tau_z (f * g)](x) = (f * g)(x-z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z-y) \, g(y) \, \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \tau_z f(x-y) \, g(y) \, \mathrm{d}y = [(\tau_z f) * g](x) \, ,$$

$$\tau_z (f * g) = \tau_z (g * f) = (\tau_z g) * f = f * (\tau_z g) \, .$$

(d) Předpokládejme, že $(f * g)(x) \neq 0$ pro jisté $x \in \mathbb{R}^n$ a že $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, tj. není možné psát $x = y + z$, kde $y \in \operatorname{supp} f$, $z \in \operatorname{supp} g$. Pro libovolné $z \in \operatorname{supp} g$ je tedy $x - z \notin \operatorname{supp} f$. Tudíž vždy $f(x-z) \, g(z) = 0$. To je ovšem spor s tím, že $(f * g)(x) \neq 0$.

□

6.2 Aproximace hladkými funkcemi

Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je libovolná otevřená množina. Pro $\varepsilon > 0$ položme

$$U_\varepsilon = \{x \in U;\, \operatorname{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}.$$

Uvažujme funkci $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou jako

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}, & t > 0. \end{cases}$$

Lze ukázat, že $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pomocí matematické indukce lze totiž ukázat, že

$$h^{(n)}(t) = P_n\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}, \qquad t > 0,\, n \in \mathbb{N},$$

kde P_n je polynom stupně $2n$. Odtud plyne $h^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Funkce $h\left(1 - |x|^2\right) = h\left(1 - |x_1|^2 - \cdots - |x_n|^2\right)$ je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^n$. Dokonce tato funkce patří do třídy $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, protože pro $|x| \geq 1$ je $h\left(1 - |x|^2\right) = 0$. Existuje tak konstanta $c > 0$ taková, že

$$\frac{1}{c} = \int_{\mathbb{R}^n} h\left(1 - |x|^2\right)\,\mathrm{d}x = \int_{B(0,1)} h\left(1 - |x|^2\right)\,\mathrm{d}x.$$

Z toho vyplývá, že funkce $\eta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$\eta(x) = \begin{cases} c \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{|x|^2 - 1}}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

je nezáporná, $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ a je $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Pro $a > 0$ dále položme

$$\eta_a(x) = \frac{1}{a^n}\eta\left(\frac{x}{a}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zřejmě je η_a nezáporná, $\eta_a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_a(x)\,\mathrm{d}x = 1$ a navíc $\eta_a(x) > 0$, právě když $|x| < a$. Takové funkci η_a se říká *regularizační funkce* nebo také *vyhlazovací jádro*.

Uvažujme funkci $f\colon U \to \mathbb{R}$ takovou, že $\int_U f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje. Potom pro libovolné $\varepsilon > 0$ lze na množině U_ε definovat funkci $f^\varepsilon = \eta_\varepsilon * f$, tj. pro každé $x \in U_\varepsilon$ klademe

$$f^\varepsilon(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x - y) f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y) f(x - y)\,\mathrm{d}y.$$

Funkce f^ε se nazývá *regularizace funkce* f a má vlastnosti:

1. $f^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$;
2. $f^\varepsilon \to f$ pro $\varepsilon \to 0^+$ skoro všude (na U, resp. $U_\varepsilon \to U$ pro $\varepsilon \to 0^+$);
3. jestliže $f \in C(U)$, pak $f^\varepsilon \to f$ stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině množiny U;
4. jestliže $f \in L^p_{(loc)}(U)$ pro $p \in [1, \infty)$, pak $\|f^\varepsilon - f\|_{L^p_{(loc)}(U)} \to 0$ pro $\varepsilon \to 0^+$.

6.3 Fourierova transformace

V této podkapitole budeme uvažovat funkce nabývající komplexních hodnot.

Definice. Pro funkci $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definujeme její *Fourierovu transformaci* jako

$$\mathcal{F}u(y) = \widehat{u}(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} u(x)\,\mathrm{d}x, \quad y \in \mathbb{R}^n \tag{6.3.1}$$

a její *inverzní Fourierovu transformaci* jako

$$\check{u}(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} u(x)\,\mathrm{d}x, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Poznámka. Poznamenejme, že tato definice je korektní, neboť

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}xy} u(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|\,\mathrm{d}x < \infty.$$

V teorii PDE potřebujeme, aby Fourierova transformace byla definovaná na celém prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ovšem $L^2(\mathbb{R}^n)$ netvoří podmnožinu $L^1(\mathbb{R}^n)$. Lze však ukázat, že $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, když $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Navíc zobrazení $\mathcal{F}\colon L^1 \cap L^2 \to L^2$, $\mathcal{F}\colon u \mapsto \widehat{u}$ je izometrické, tj.

$$\|u\|_{L^2(R^n)} = \|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Toto izometrické zobrazení lze s využitím úplnosti $L^2(\mathbb{R}^n)$ rozšířit na izometrii $L^2(\mathbb{R}^n)$ na $L^2(\mathbb{R}^n)$. Příslušné rozšíření se také označuje za Fourierovu transformaci, resp. se mluví o *Plancherelově transformaci*.

Věta (Plancherelova)**.** *Nechť $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Potom $\widehat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ a platí*

$$\|\widehat{u}\|_{L^2(R^n)} = \|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.3.2}$$

Důkaz. Dokažme tvrzení pouze pro $\widehat{u}$, tvrzení pro $\check{u}$ lze obdržet analogicky. Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pro $y \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\left|\widehat{f}(y)\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \text{konst} \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Odtud plyne

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \inf\left\{\alpha; |\widehat{f}(x)| \le \alpha \text{ pro s. v. } x \in \mathbb{R}^n\right\} \le \text{konst} \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

tj. $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dále je

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} f(x)\,g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)\,g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Pro každé $\varepsilon > 0$ dostáváme

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y)\,\mathrm{e}^{-\varepsilon|y|^2}\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\widehat{\mathrm{e}^{-\varepsilon|y|^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{(2\varepsilon)^n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}\,\mathrm{d}x,$$

tj.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y)\,\mathrm{e}^{-\varepsilon|y|^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{(2\varepsilon)^n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}\,\mathrm{d}x. \tag{6.3.3}$$

Pro $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ položme $v(x) = \overline{u}(-x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $w = u * v$. Lze ukázat, že $w \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$. Pro $y \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\widehat{w}(y) = \widehat{u * v}(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(z)\,v(x-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zy} u(z) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-z)y} v(x-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \widehat{v}(y) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zy} u(z)\,\mathrm{d}z = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\,\widehat{u}(y)\,\widehat{v}(y)$$

a

$$\widehat{v}(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} \overline{u}(-x)\,\mathrm{d}x = \overline{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-x)y} u(-x)\,\mathrm{d}x} = \overline{\widehat{u}(y)}.$$

Celkem

$$\widehat{w} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\,|\widehat{u}|^2.$$

S využitím spojitosti w získáváme

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} (2\varepsilon)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} w(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}\,\mathrm{d}x = w(0) \cdot (2\pi)^{\frac{n}{2}}.$$

To spolu s (6.3.3) dává

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{w}(y)\,\mathrm{d}y = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot w(0).$$

Odtud

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(y)|^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{w}(y)\,\mathrm{d}y = w(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)\,v(-x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)\,\overline{u}(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Tedy

$$\|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Plancherelova věta nám dává již zmíněnou možnost definovat Fourierovu transformaci na celém $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pro libovolnou funkci $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ volme posloupnost $\{u_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ takovou, že $u_i \to u$ pro $i \to \infty$ v $L^2(\mathbb{R}^n)$. Vzhledem k (6.3.1) a (6.3.2) platí

$$\|\widehat{u_i} - \widehat{u_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{u_i - u_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_i - u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

To znamená, že posloupnost $\{\widehat{u}_i\}_{i=1}^{\infty}$ je cauchyovská v $L^2(\mathbb{R}^n)$. Protože je $L^2(\mathbb{R}^n)$ úplný, existuje limita posloupnosti $\{\widehat{u}_i\}_{i=1}^{\infty}$, kterou označme jako $\widehat{u}$. Je zřejmé, že $\widehat{u}$ nezávisí na zvolené posloupnosti $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$, tj. zavedení $\widehat{u}$ je korektní. Podobně lze zavést také $\check{u}$.

Věta. *Pro libovolné funkce $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ platí*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x) \cdot \overline{v}(x)\, \mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(x) \cdot \overline{\widehat{v}}(x)\, \mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nechť $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Pak platí

$$\|u + \alpha v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|\widehat{u} + \alpha \widehat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

tj.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u + \alpha v)(\overline{u} + \overline{\alpha v}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\widehat{u} + \alpha \widehat{v}) \left(\overline{\widehat{u}} + \overline{\alpha \widehat{v}}\right),$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(|u|^2 + \alpha v \overline{u} + \overline{\alpha v} u + |\alpha v|^2\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(|\widehat{u}|^2 + \alpha \widehat{v} \overline{\widehat{u}} + \overline{\alpha} \overline{\widehat{v}} \widehat{u} + |\alpha \widehat{v}|^2\right),$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\alpha \overline{u} v + \overline{\alpha} u \overline{v}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\alpha \overline{\widehat{u}} \widehat{v} + \overline{\alpha} \widehat{u} \overline{\widehat{v}}\right).$$

Zvolme $\alpha = 1$, kdy

$$2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Re}(\overline{u} v) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{u} v + \overline{\overline{u} v} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\widehat{u}} \widehat{v} + \overline{\overline{\widehat{u}} \widehat{v}} = 2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Re}\left(\overline{\widehat{u}} \widehat{v}\right).$$

Pro $\alpha = \mathrm{i}$ pak podobně platí

$$2\mathrm{i} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Im}(\overline{u} v) = 2\mathrm{i} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Im}\left(\overline{\widehat{u}} \widehat{v}\right).$$

Odtud dostáváme

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{u} v = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\widehat{u}} \widehat{v}.$$

□

Věta. *Pro každý multiindex α a funkci $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ takové, že $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, je*

$$\widehat{D^\alpha u}(y) = (\mathrm{i}y)^\alpha \cdot \widehat{u}(y) \qquad v\ L^2(\mathbb{R}^n).$$

Důkaz. Lze využít toho, že $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ je hustá množina v $L^2(\mathbb{R}^n)$. Proto se lze omezit na funkci $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, pro kterou

$$\widehat{D^\alpha u}(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} D^\alpha u(x)\, \mathrm{d}x =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \cdot (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\right) u(x)\, \mathrm{d}x = (iy)^\alpha\, \widehat{u}(y).$$

□

Věta. *Pro $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ platí $\widehat{u * v} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \widehat{u}\widehat{v}$ v $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Důkaz. Plyne z důkazu Plancherelovy věty. □

Věta. *Pro každou funkci $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ je $u = (\widehat{u})^{\check{}}$ v $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Důkaz. Pro libovolné $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ je

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \check{u}(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} u(y)\, \mathrm{d}y\, v(x)\, \mathrm{d}x = \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} u(y)\, v(x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \left((2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} v(x)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, \check{v}(y)\, \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

a

$$\check{v}(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} v(x)\, \mathrm{d}x = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \overline{\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} \overline{v}(x)\, \mathrm{d}x} = \overline{\widehat{\overline{v}}}(y).$$

Proto je

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{u})^{\check{}}(x) \cdot \overline{v}(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(x)\, \check{\overline{v}}(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(x)\, \overline{\widehat{v}}(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, \overline{v}(x)\, \mathrm{d}x,$$

tj.

$$\langle (\widehat{u})^{\check{}} - u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} [(\widehat{u})^{\check{}} - u]\, \overline{v} = 0$$

pro libovolné $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Jediný prvek $L^2(\mathbb{R}^n)$ ortogonální ke všem ostatním je nulový prvek, tj. $(\widehat{u})^{\check{}} = u$ v $L^2(\mathbb{R}^n)$. □

Příklad. *Uvažujme rovnici*

$$-\Delta u + u = f \qquad \text{na } \mathbb{R}^n,$$

kde $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$. Víme, že

$$\widehat{D^{(0,0,\dots,0,2,0,\dots 0)} u}(x) = (\mathrm{i}x_i)^2\, \widehat{u}(x),$$

a tudíž

$$(-\Delta u + u)^{\widehat{}}(x) = |x|^2 \widehat{u}(x) + \widehat{u}(x).$$

Zadaná rovnice přejde na

$$\left(1 + |x|^2\right) \widehat{u}(x) = \widehat{f}(x),$$

což je algebraická rovnice s řešením

$$\widehat{u}(x) = \frac{\widehat{f}(x)}{1 + |x|^2}, \qquad u(x) = \left[\frac{\widehat{f}(y)}{1 + |y|^2} \right]^{\check{}}(x).$$

Zkráceně psáno, je

$$u = \left[\frac{\widehat{f}\,(y)}{1+|y|^2} \right]^{\vee} = \left(\widehat{f}\,(y) \left[\left(\frac{1}{1+|y|^2} \right)^{\vee} \right]^{\wedge} \right)^{\vee} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, f * \left(\frac{1}{1+|y|^2} \right)^{\vee}.$$

Zbývá stanovit $\left(\frac{1}{1+|y|^2}\right)^{\vee}$*, což lze učinit kupř. pomocí teorie funkcí komplexní proměnné se ziskem*

$$\left(\frac{1}{1+|y|^2} \right)^{\vee}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \int\limits_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{\frac{n}{2}}}\, \mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Lze ověřit, že funkce

$$u\,(x) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{e}^{-t-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{t^{\frac{n}{2}}} f\,(y)\; \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

je řešením zadané rovnice.

7 Laplaceova a Poissonova rovnice

Laplaceovou rovnicí se rozumí

$$\Delta u = 0 \quad \text{na } U \tag{7.1}$$

a rovnice Poissonova je tvaru

$$-\Delta u = f \quad \text{na } U, \tag{7.2}$$

kde $u\colon \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f\colon U \to \mathbb{R}$, U je otevřená množina. Tyto rovnice bývají doplněny jednou z podmínek (nejčastěji při ohraničenosti U). Pro $g\colon \partial U \to \mathbb{R}$ se uvažuje:

(a) Dirichletova podmínka

$$u(x) = g(x), \qquad x \in \partial U.$$

(b) Neumannova podmínka

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = g(x), \qquad x \in \partial U.$$

Uvažujme komplexní funkci komplexní proměnné $f\colon U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, která je holomorfní. S ohledem na identifikaci $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lze psát $z \in \mathbb{C}$ jako $z = x + \mathrm{i}y$, a tedy

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y),$$

kde u je reálná část, v imaginární část f, přičemž $u, v\colon U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Platí

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \\
&= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + \mathrm{i}v(x+\Delta x, y+\Delta y)}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y} - \frac{u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y} = \\
&= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} + \mathrm{i} \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y}.
\end{aligned}$$

Protože $f'(z)$ existuje, existují i obě dvojné limity a konečně existují také ve směrem $(\Delta x, 0)$ a $(0, \Delta y)$, kdy

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + \mathrm{i} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}, \\
f'(z) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\mathrm{i}\Delta y} + \mathrm{i} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\mathrm{i}\Delta y} = -\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí dostáváme tzv. *Cauchyovy-Riemannovy* podmínky (též rovnice)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Neboť má f derivace všech řádů, je $u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$, $v_{yy} = u_{xy} = -v_{xx}$. To znamená, že reálná i imaginární část holomorfní funkce vyhovuje rovnici (7.1), tj.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{na } U.$$

Definice. Funkce $u \in C^2(U)$ splňující Laplaceovu rovnici se nazývá *harmonická*.

Ve skalárním případě $n = 1$ je řešení (7.1) triviální. Pokud je $U = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, pak každá harmonická funkce na U je tvaru $u(x) = \alpha x + \beta$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Je-li $U \subseteq \mathbb{R}$ libovolná otevřená množina, potom lze U právě jedním způsobem vyjádřit jako sjednocení nejvýše spočetně mnoha po dvou disjunktních intervalů $U = \bigcup_{i=1}^m (a_i, b_i)$, kde $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Funkce u je pak na každém intervalu (a_i, b_i) tvaru $u(x) = \alpha_i x + \beta_i$. Pro $n \geq 2$ se situace komplikuje. Je zřejmé, že lineární funkce

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^n x_n + \beta \tag{7.3}$$

je řešením (7.1) na libovolném U. Nelze obecně dosáhnout toho, aby funkce (7.3) splňovaly předepsané okrajové podmínky na ∂U. Rovnice (7.1) je lineární. Proto má smysl „najít význačná řešení“ a ostatní z nich „sestavit“. Důležitou roli hraje zjištění, že rovnice (7.1) je invariantní vzhledem k rotaci. To je obsahem následujícího lemmatu. Uvažujeme $U = \mathbb{R}^n$.

Lemma. *Je-li $u \in C^2$ řešením (7.1) a je-li $R = (r_{ij})_{ij=1}^n$ ortogonální matice, potom funkce v definovaná jako*

$$v(x) = u(Rx)$$

je řešením (7.1) také.

Důkaz. Platí

$$v(x_1, \ldots, x_n) = u\left(\sum_{j=1}^n r_{1j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^n r_{nj} x_j\right),$$

a tedy

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i} r_{ik}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} r_{ik} r_{jk}, \quad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Odtud

$$\begin{aligned} \Delta v = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} = \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} r_{ik} r_{jk} &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} \sum_{k=1}^n r_{ik} r_{jk} = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} = \Delta u = 0. \end{aligned}$$

□

Proto budeme hledat řešení (7.1) na $U = \mathbb{R}^n$ ve tvaru $u(x) = v(r)$, kde

$$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Platí

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \qquad \text{pro } i \in \{1, \ldots, n\},$$

tj. pro $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ je

$$u_{x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}, \qquad u_{x_i x_i} = v''(r) \left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right),$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = v''(r) + v'(r) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) = v''(r) + v'(r) \left(\frac{n}{r} - \frac{1}{r}\right).$$

Dostáváme tak ODE

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0, \tag{7.4}$$

kterou vyřešíme. Položme $v'(r) = z$. Pak

$$\begin{aligned}
z' + \frac{n+1}{r} z &= 0,\\
\frac{z}{r} &= w,\\
w'r + w &= -(n-1)\,w,\\
\frac{w'}{w} &= -\frac{n}{r},\\
\log|w| &= -\log r^n + \log k, \quad k > 0,\\
w &= \frac{k}{r^n}, \quad k \neq 0,\\
w &= \frac{z}{r} = \frac{k}{r^n}, \quad k \in \mathbb{R},\\
z &= \frac{k}{r^{n-1}} = v'(r).
\end{aligned}$$

Jako řešení (7.4) tak máme $v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$ pro jisté a. To znamená, že pro $r > 0$ je

$$v(r) = \begin{cases} b \log r + c, & n = 2;\\ b\frac{1}{r^{n-2}} + c, & n \geq 3. \end{cases}$$

Definice. Funkce $\Phi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|x|, & n = 2;\\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases} \tag{7.5}$$

se nazývá *fundamentální (elementární) řešení* (7.1) na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Zřejmě zobrazení $x \mapsto \Phi(x-y)$ je řešení (7.1) na $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ pro každé $y \in \mathbb{R}^n$. Také funkce $x \mapsto \Phi(x-y)\,f(y)$ je řešení rovnice (7.1). Konečně libovolná lineární kombinace tvaru $\sum_{i=1}^m \Phi(x-y_i)\,f(y_i)$ je řešením (7.1).

Věta. *Nechť $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Funkce*

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)\,f(y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \log(|x-y|)\,f(y)\,\mathrm{d}y, & n = 2;\\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\,\mathrm{d}y, & n \geq 3 \end{cases}$$

je třídy C^2 na $\mathbb{R}^n$ a platí

$$-\Delta u = f \qquad \text{na } \mathbb{R}^n.$$

Definice. Objemovým průměrem se rozumí

$$⨍_{B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\alpha(n)\,r^n} \int\limits_{B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}y$$

a plošným průměrem poté

$$\fint_{\partial B(x,r)} f(y)\ \mathrm{d}S = \frac{1}{n\alpha(n)\, r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} f(y)\ \mathrm{d}S.$$

Uvažujme opět $n = 1$, $U = (a,b)$, $B[x,r] = [x-r, x+r] \subseteq (a,b)$ a $u(x) = \alpha x + \beta$. Platí

$$\begin{aligned}\fint_{B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2r} \int\limits_{x-r}^{x+r} \alpha y + \beta \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2r}\left[\frac{\alpha y^2}{2} + \beta y\right]_{x-r}^{x+r} &= \\ = \frac{1}{2r}\left(\frac{\alpha(x+r)^2}{2} - \frac{\alpha(x-r)^2}{2} + 2\beta r\right) &= \\ = \frac{1}{2r}\left(2\alpha x r + 2\beta r\right) = \alpha x + \beta = u(x)&.\end{aligned}$$

Podobně je

$$\fint_{\partial B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}S = u(x).$$

Ukážeme si, že tohle platí pro obecné n.

Věta. *Nechť u je harmonická funkce na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Potom je*

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}y = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}S$$

pro každou kouli $B[x,r] \subseteq U$.

Důkaz. Nechť $B[x,r] \subseteq U$ pro jistá r a pro ně definujeme funkci

$$\varphi(r) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}S(y) = \fint_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\ \mathrm{d}S(z).$$

Derivováním dostáváme

$$\begin{aligned}\varphi'(r) = \fint_{\partial B(0,1)} Du(x+rz)\cdot z\,\mathrm{d}S(z) &= \fint_{\partial B(x,r)} Du(y)\,\frac{y-x}{r}\,\mathrm{d}S(y) = \\ &= \fint_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y)\ \mathrm{d}S(y) = \frac{r}{n}\fint_{B(x,r)} \Delta u(y)\ \mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$

To ovšem znamená, že $\varphi(r)$ je konstantní pro $r > 0$. Tudíž je

$$\varphi(r) = \lim_{r\to 0^+} \varphi(r) = \lim_{r\to 0^+} \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}S(y) = u(x).$$

Dokázali jsme, že

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}S(y).$$

Dále platí

$$\int\limits_{B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}y = \int\limits_0^r \left(\int\limits_{\partial B(x,s)} u(y)\ \mathrm{d}S(y)\right)\mathrm{d}s = \int\limits_0^r n\alpha(n)\, s^{n-1} u(x)\ \mathrm{d}s = \alpha(n)\, u(x)\, r^n,$$

tj.

$$u(x) = \frac{1}{\alpha(n)\, r^n} \int\limits_{B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}y = \fint_{B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}y.$$

$\square$

Věta. *Nechť $u \in C^2(U)$ splňuje na každé kouli $B[x,r] \subseteq U$ podmínku*

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}S(y).$$

Potom je funkce u harmonická na U.

Důkaz. Předpokládejme sporem, že existuje $x \in U$ takové, že $\Delta u(x) \neq 0$. Protože $x \in U^0$, existuje $r > 0$ dostatečně malé, aby $B[x,r] \subseteq U$ a současně $\Delta u(y) \neq 0$, $y \in B[x,r]$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\Delta u(y) > 0$ pro všechna $y \in B[x,r]$. Pro funkci

$$\varphi(r) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}S(y)$$

z předchozího důkazu získáváme

$$\varphi'(r) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y)\ \mathrm{d}y > 0.$$

To je spor, neboť máme

$$u(x) = \lim_{r \to 0^+} \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\ \mathrm{d}S(y) = \varphi\left(0^+\right) < \varphi(s) = \fint_{\partial B(x,s)} u(y)\ \mathrm{d}S(y) = u(x)$$

pro jisté s. $\square$

Uvažme opět $n = 1$ a $U = (a,b)$. Každá harmonická funkce na U je tvaru $u(x) = \alpha x + \beta$. Nechť $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$. Zřejmě u nabývá svých extrémů na hranici ∂U, tj.

$$\max_{x \in \overline{U}} u(x) = \max_{x \in \partial U} u(x), \qquad \min_{x \in \overline{U}} u(x) = \min_{x \in \partial U} u(x)$$

Navíc, nabude-li u extrému na U, pak je konstantní. Princip maxima tvrdí, že předchozí platí také pro obecné harmonické funkce.

Věta. *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a ohraničená množina a funkce $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ je harmonická na U.*

- *Slabý princip maxima: Platí*

$$\max_{x \in \overline{U}} u(x) = \max_{x \in \partial U} u(x).$$

- *Silný princip maxima: Je-li navíc množina U souvislá, tak existence bodu $x_0 \in U$ splňujícího $u(x_0) = \max_{x \in \overline{U}} u(x)$ zaručuje, že u je konstantní na U.*

Důkaz. Nejprve dokážeme silný princip maxima. Nechť U je souvislá a nechť příslušné $x_0 \in U$. Označme $M = u(x_0) = \max_{x \in \overline{U}} u(x)$. Pro $r \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial U))$ máme

$$M = u(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u(y)\, \mathrm{d}y \leq M.$$

Ze spojitosti u plyne, že $u \equiv M$ na $B(x_0, r)$, tj. x_0 je vnitřní bod množiny

$$A = \{x \in U;\, u(x) = M\}.$$

Množina A je otevřená v U a současně je uzavřená v U. Neboť je U souvislá, tak jediné obojetné množiny v ní jsou $\emptyset$ a U. Proto $A = U$. Tím jsme dokázali, že $u \equiv M$ na U.

Nyní dokážeme slabý princip maxima. Zvolme souvislou komponentu X množiny U, na jejímž uzávěru nabývá U svého maxima. Znovu platí, že množina

$$B = \left\{ x \in X;\, u(x) = \max_{y \in \overline{X}} u(y) \right\}$$

je $\emptyset$, nebo X. Pokud $B = \emptyset$, pak maximum leží na $\partial X \subseteq \partial U$. Pokud $B = X$, pak $u \equiv \max_{y \in \overline{X}} u(y)$ a tvrzení plyne z toho, že $u \in C(\overline{U})$. □

Poznámka. Pokud je U souvislá a $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ je řešení problému $\Delta u = 0$ na U, $u = g$ na ∂U, kde $g \geq 0$, potom je funkce u kladná na celém U, když je g kladná aspoň někde na ∂U.

Věta. *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a ohraničená množina, $g \in C(\partial U)$, $f \in C(U)$. Pak existuje nejvýše jedno řešení $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ okrajové úlohy*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{na } U, \\ u &= g \qquad \text{na } \partial U. \end{aligned}$$

Důkaz. Nechť existují dvě různá řešení u_1, u_2. Pak funkce $w_1 \equiv u_1 - u_2$ a $w_2 \equiv u_2 - u_1$ jsou harmonické na U a nulové na ∂U. Dle principu maxima jsou tyto funkce w_1, w_2 nekladné na U. Odtud plyne, že $u_1 \equiv u_2$ na U. □

Připomeňme, že pro $n = 2$ se harmonické funkce objevují jako reálné a imaginární části holomorfních funkcí.

Věta. *Nechť funkce $u \in C(U)$ splňuje podmínku*

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)\, \mathrm{d}S(y)$$

pro každou uzavřenou kouli $B[x, r] \subseteq U$. Potom je $u \in C^\infty(U)$.

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$, η_ε standardní regularizační funkce. Pro

$$x \in U_\varepsilon = \{x \in U;\, \operatorname{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$$

položme $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$. Označme jako $\widetilde{\eta}$ funkci η pro $n = 1$.

Potom pro $x \in U_\varepsilon$ dostáváme

$$
\begin{aligned}
u^\varepsilon(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, \mathrm{d}y &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_U \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\, \mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\, \mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \widetilde{\eta}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\partial B(x,r)} u(y)\, \mathrm{d}S(y) \right) \mathrm{d}r = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} u(x)\, n\alpha(n) \int_0^\varepsilon \widetilde{\eta}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) r^{n-1}\, \mathrm{d}r = u(x) \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y)\, \mathrm{d}y = u(x).
\end{aligned}
$$

Tedy $u = u^\varepsilon$ na U_ε. Z vlastností konvoluce plyne, že $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, je $u \in C^\infty(U)$. $\square$

Věta. *Nechť funkce u je harmonická na U. Potom pro každou uzavřenou kouli $B[x_0, r] \subset U$ a každý multiindex α délky k platí*

$$
|D^\alpha u(x_0)| \le \frac{c_k}{r^{n+k}} \int_{B(x_0,r)} |u(x)|\, \mathrm{d}x,
$$

kde

$$
c_0 = \frac{1}{\alpha(n)}, \qquad c_k = \frac{\left(2^{n+1} \cdot n \cdot k\right)^k}{\alpha(n)}, \quad k \in \mathbb{N}.
$$

Uvažujme ohraničenou harmonickou funkci u na $\mathbb{R}^n$, tj. nechť $|u(x)| \le M$ pro jisté $M > 0$ a všechna $x \in \mathbb{R}^n$. Pro libovolné $r > 0$ a bod x_0 dostáváme

$$
|Du(x_0)| \le \frac{\text{konst}}{r^{n+1}} \int_{B(x_0,r)} |u(x)|\, \mathrm{d}x \le \frac{r^n}{r^{n+1}} \cdot \text{konst} \to 0 \qquad \text{pro } r \to \infty.
$$

Protože x_0 byl libovolný bod, je $Du \equiv 0$ a u je konstantní na $\mathbb{R}^n$.

Věta (Liouvilleova)**.** *Nechť funkce u je harmonická a ohraničená na $\mathbb{R}^n$, potom je u konstantní.*

Věta (O reprezentaci řešení Poissonovy rovnice)**.** *Nechť $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ a $n \ge 3$. Každé ohraničené řešení* (7.2) *na $\mathbb{R}^n$ je tvaru*

$$
u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)\, f(y)\, \mathrm{d}y + c, \qquad x \in \mathbb{R}^n,
$$

kde c je konstanta.

Důkaz. Pro $n \ge 3$ je Φ tvaru

$$
x \mapsto \frac{1}{n(n-2)\,\alpha(n)} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}}, \qquad x \ne 0,
$$

a tedy pro $|x| \to \infty$ máme $\Phi(x) \to 0$. Funkce

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y$$

je tedy ohraničené řešení (7.2). Je-li v jiné ohraničené řešení úlohy (7.2), potom je funkce $w = u - v$ ohraničené řešení (7.1). Podle Liouvilleovy věty je funkce w konstantní, tj. $v = u + c$, kde $c \in \mathbb{R}$. □

Poznámka. Pro $n = 2$ předchozí věta neplatí, protože fundamentální řešení není ohraničené pro $|x| \to \infty$.

Odhady derivací harmonické funkce dále umožňují dokázat:

Věta. *Každá funkce, která je harmonická na U, je také analytická na U.*

Definice. Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je libovolná otevřená množina a V je otevřená množina splňující $V \subset \overline{V} \subset U$, $\overline{V}$ je kompaktní. Říkáme, že V je *kompaktně vnořená do U*; a píšeme $V \subset\subset U$.

Protože $\overline{V}$ je kompaktní, je

$$\operatorname{dist}(V, \partial U) = \inf \left\{ \operatorname{dist}(x, \partial U) \, ; \, x \in \overline{V} \right\} > 0.$$

Z toho vyplývá, že lze každou harmonickou funkci u na U vyjádřit na $\overline{V}$ pomocí průměrů stejného poloměru. Pokud je funkce u kladná, znamená to, že u nemůže být v jistém bodě $\overline{V}$ „příliš velká", pokud není „velká" v každém bodě množiny V. Říkáme, že kladná harmonická funkce je *souměřitelná.* To je obsahem následující věty.

Věta (Harnackova nerovnost)**.** *Nechť V je souvislá množina v $\mathbb{R}^n$ taková, že $V \subset\subset U$. Pak existuje konstanta $c > 0$ závisející pouze na V s vlastností, že pro každou kladnou harmonickou funkci u na U platí*

$$\sup_{x \in V} u(x) \le c \cdot \inf_{x \in V} u(x), \quad \textit{tj.} \quad \frac{1}{c} u(y) \le u(x) \le c\, u(y), \quad x, y \in V.$$

Důkaz. Položme $r = \frac{1}{4} \operatorname{dist}(V, \partial U)$. Je-li $x, y \in V$, $|x - y| \le r$, pak

$$u(x) = \frac{1}{\alpha(n)(2r)^n} \int\limits_{B(x,2r)} u(\xi) \, \mathrm{d}\xi \ge \frac{1}{\alpha(n)(2r)^n} \int\limits_{B(y,r)} u(\xi) \, \mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int\limits_{B(y,r)} u(\xi) \, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2^n} u(y),$$

tj.

$$2^n u(y) \ge u(x) \ge \frac{1}{2^n} u(y).$$

Protože $\overline{V}$ je souvislá kompaktní množina, lze ji pokrýt uzavřenými koulemi $B_1, \dots, B_N$ o poloměru $r/2$ takovými, že $B_i \cap B_{i+1} \ne \emptyset$, $i \in \{1, \dots, N-1\}$. To znamená, že pro všechna $x, y \in V$ platí

$$(2^n)^N u(y) \ge u(x) \ge \left(\frac{1}{2^n}\right)^N u(y).$$

□

Hledejme dále řešení rovnic (7.1), (7.2) splňující Dirichletovu okrajovou podmínku. Předpokládejme, že U je otevřená a ohraničená a ∂U je třídy C^1. Naším cílem je získat formuli řešení úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{na } U; \\ u &= g \quad \text{na } \partial U. \end{aligned}$$

Nechť u je libovolná funkce z $C^2(\overline{U})$. Zvolme libovolně $x \in U$. Nechť $\varepsilon > 0$ je tak malé, že $B[x,\varepsilon] \subset U$. Označme

$$V_\varepsilon = U - B[x,\varepsilon].$$

Opět $\vec{n}$ značí jednotkový vektor vnější normály k ∂V_ε. Třetí Greenova identita dává

$$\int\limits_{V_\varepsilon} u(y)\,\Delta_{(y)}\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\,\Delta u(y)\;\mathrm{d}y = \int\limits_{\partial V_\varepsilon} u(y)\,\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}}(y-x) - \Phi(y-x)\,\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}(y)\;\mathrm{d}S(y).$$

Z vlastností fundamentálního řešení Φ plyne, že

$$\int\limits_{V_\varepsilon} u(y)\,\Delta_{(y)}\Phi(y-x)\;\mathrm{d}y = 0.$$

Snadno můžeme spočítat, že

$$D\Phi(y-x) = \frac{-1}{n\alpha(n)}\cdot\frac{y-x}{|y-x|^n}, \quad y \neq x.$$

Pro $y \in \partial B(x,\varepsilon)$ je $\vec{n} = -\frac{y-x}{\varepsilon}$. Protože $\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}} = \vec{n}\cdot D\Phi$, dostáváme pro $y \in \partial B(x,\varepsilon)$ vyjádření

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}}(y-x) = \frac{1}{n\alpha(n)\,\varepsilon^{n-1}},$$

a tedy

$$\int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\,\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}}(y-x)\;\mathrm{d}S(y) = \frac{1}{n\alpha(n)\,\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\;\mathrm{d}S(y) \to u(x) \qquad \text{pro } \varepsilon \to 0^+.$$

Současně dostáváme následující odhady

$$\left|\int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} \Phi(y-x)\,\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}(y)\;\mathrm{d}S(y)\right| \leq \max_{x\in\partial B(0,\varepsilon)}|\Phi(x)|\int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} |Du(y)|\,\mathrm{d}S(y) \leq$$
$$= \text{konst}\cdot\max_{x\in\partial B(0,\varepsilon)}|\Phi(x)|\int\limits_{\partial B(0,\varepsilon)}\mathrm{d}S(y) = \text{konst}\cdot\max_{x\in\partial B(0,\varepsilon)}|\Phi(x)|\,\varepsilon^{n-1} \to 0 \qquad \text{pro } \varepsilon \to 0^+.$$

Pro $\varepsilon \to 0^+$ získáváme

$$u(x) = \int\limits_{\partial U}\left[\Phi(y-x)\,\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}(y) - u(y)\,\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}}(y-x)\right]\mathrm{d}S(y) - \int\limits_{U}\Phi(y-x)\,\Delta u(y)\;\mathrm{d}y \tag{7.6}$$

pro všechna $x \in U$ a každou funkci $u \in C^2(\overline{U})$. Nyní máme úlohu vyřešenu pro kombinaci Dirichletovy a Neumannovy podmínky. Abychom nemuseli uvažovat výraz $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$, zavedeme tzv. *korekční funkci* $\varphi^x = \varphi^\times = \varphi^\times(y)$ pro $x \in U$, která je řešením problému

$$\begin{aligned} \Delta\varphi^\times &= 0 && \text{na } U; \\ \varphi^\times &= \Phi(y-x) && \text{na } \partial U. \end{aligned}$$

Třetí Greenova identita dává

$$\begin{aligned} &-\int_U \varphi^\times(y)\,\Delta u(y)\;\mathrm{d}y = \\ &= -\int_U \Delta\varphi^\times(y)\,u(y)\;\mathrm{d}y + \int_{\partial U} \frac{\partial \varphi^\times}{\partial \vec{n}}(y)\,u(y)\;\mathrm{d}S(y) - \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y)\,\varphi^\times(y)\;\mathrm{d}S(y) = \\ &\qquad = \int_{\partial U} \left[u(y)\,\frac{\partial \varphi^\times}{\partial \vec{n}}(y) - \Phi(y-x)\,\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y)\right]\mathrm{d}S(y). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Definice. Greenovou funkcí pro množinu U rozumíme funkci

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \varphi^\times(y),$$

kde $x \in U$, $y \in \overline{U}$, $x \neq y$.

Vztahy (7.6) a (7.7) dávají

$$u(x) = -\int_{\partial U} u(y)\,\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(x,y)\;\mathrm{d}S(y) - \int_U G(x,y)\,\Delta u(y)\;\mathrm{d}y, \quad x \in U, \tag{7.8}$$

kde se již $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ nevyskytuje. Je-li tak funkce $u \in C^2(\overline{U})$ řešením Dirichletova problému pro Poissonovu rovnici, lze hodnoty Δu na U a u na ∂U v (7.8) nahradit funkcemi f, g. Tím jsme dokázali následující větu.

Věta (Greenova)**.** *Nechť funkce $u \in C^2(\overline{U})$ je řešením*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \textit{na } U; \\ u &= g && \textit{na } \partial U. \end{aligned}$$

Pak platí

$$u(x) = -\int_{\partial U} g(y)\,\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(x,y)\;\mathrm{d}S(y) + \int_U G(x,y)\,f(y)\;\mathrm{d}y, \qquad x \in U.$$

Konstrukce Greenovy funkce pro danou množinu U je „netriviální“. Důležitý případ vzniká pro množinu $U = \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_n > 0\}$. Tato množina není ohraničená. Je nutné přímým výpočtem ověřit, že získaná formule opravdu dává řešení zadaného problému. Začneme u Φ a odstraníme jeho singularitu pomocí tzv. reflexe přes hranici $\partial\mathbb{R}^n_+ = \{x_n = 0\}$. *Reflexí bodu* $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ rozumíme bod $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$. Položíme-li

$$\varphi^\times(y) = \Phi(y - \widetilde{x}) = \Phi(y_1 - x_1, \ldots, y_{n-1} - x_{n-1}, y_n + x_n), \quad x \in \mathbb{R}^n_+,\ y \in \overline{\mathbb{R}^n_+},\ x \neq y,$$

vidíme, že funkce $\varphi^{\times}$ nemá na $\mathbb{R}^n_+$ singularity a že

$$\Delta\varphi^{\times}(y) = \Delta_{(y)}\Phi(y-\widetilde{x}) = 0 \qquad \text{na } \mathbb{R}^n_+.$$

Navíc pro $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ je

$$\varphi^{\times}(y) = \Phi(y-\widetilde{x}) = \Phi(y-x),$$

což znamená, že $\varphi^{\times}$ je korekční funkce, a tedy Greenova funkce je

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(y-\widetilde{x}), \qquad x \in \mathbb{R}^n_+,\ y \in \overline{\mathbb{R}^n_+},\ x \neq y.$$

Odtud pro $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ plyne

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(x,y) = DG(x,y)\cdot\vec{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y)\cdot n^i(y) = \left[\frac{\partial\Phi(y-x)}{\partial y_n} - \frac{\partial\Phi(y-\widetilde{x})}{\partial y_n}\right](-1) = \\ = -\left[-\frac{1}{n\alpha(n)}\frac{y_n-x_n}{|y-x|^n} + \frac{1}{n\alpha(n)}\frac{y_n+x_n}{|y-x|^n}\right] = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|x-y|^n}.\end{aligned}$$

Je-li tak funkce $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ řešením úlohy

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad \text{na } \mathbb{R}^n_+;\\ u &= g \quad \text{na } \partial\mathbb{R}^n_+,\end{aligned} \tag{7.9}$$

potom lze předpokládat, že u lze vyjádřit jako

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\frac{g(y)}{|x-y|^n}\,\mathrm{d}S(y), \qquad x \in \mathbb{R}^n_+. \tag{7.10}$$

Tento vztah (7.10) se nazývá *Poissonova formule* pro poloprostor a funkce

$$K(x,y) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)}\frac{g(y)}{|x-y|^n}, \qquad x \in \mathbb{R}^n_+,\ y \in \partial\mathbb{R}^n_+$$

se nazývá *Poissonový jádrem.* To, zda funkce u z (7.10) je řešením (7.9), je nutné ověřit.

Věta (Poissonova formule pro poloprostor)**.** *Nechť $g \in C^1(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ a u je definováno v (7.10). Pak platí:*

1. *$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$;*
2. *$\Delta u = 0$ na $\mathbb{R}^n_+$;*
3. *$\lim\limits_{x\to x_0,\, x\in\mathbb{R}^n_+} u(x) = g(x_0)$, $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$.*

Poznámka. Další důležitou množinou je $U = B(0,1)$. Také nyní se dá využít reflexe, kdy libovolnému bodu $x \in B[0,1] \setminus \{0\}$ je přiřazen duální bod $\widetilde{x}$ pomocí zobrazení $x \mapsto \widetilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$. Lze ukázat, že

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(|x|(y-\widetilde{x}))$$

a že Poissonova formule pak je

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{n\alpha(n)} \int\limits_{\partial B(0,1)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} \, \mathrm{d}S(y),$$

přičemž za vhodných předpokladů jde o řešení okrajového problému

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{na } B(0,1); \\ u &= g \quad \text{na } \partial B(0,1). \end{aligned}$$

Na závěr ještě jednou uvažujme otevřenou a ohraničenou množinu U s hranicí třídy C^1 a okrajový problém

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{na } U; \\ u &= g \quad \text{na } \partial U \end{aligned} \tag{7.11}$$

spolu s jeho tzv. energetickým funkcionálem

$$I[w] = \int\limits_U \left(\frac{1}{2} |Dw|^2 - wf \right),$$

kde funkce w přísluší přípustné množině

$$Y = \{w \in C^2(\overline{U});\ w = g \text{ na } \partial U\}.$$

Věta (Dirichletův princip)**.** *Je-li $u \in C^2(\overline{U})$ řešením (7.11), potom je*

$$I[u] = \inf_{w \in Y} I[w]. \tag{7.12}$$

Jestliže $u \in Y$ splňuje (7.12), potom je u řešením (7.11).

8 Rovnice vedení tepla

Je tvaru

$$u_t - \Delta u = 0, \tag{8.1}$$

resp. nehomogenní rovnice vedení tepla je tvaru

$$u_t - \Delta u = f, \tag{8.2}$$

přičemž $t > 0$, $x \in U$ pro otevřenou množinu $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $u\colon \overline{U} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce a Laplaceův operátor se uvažuje pouze vzhledem k $x = (x_1, \ldots, x_n)$, tj. $\Delta u = \Delta_x u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$, $f\colon U \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ je známá funkce (často se uvažuje $f \in C(U \times [0,\infty))$).

Je-li funkce $u = u\,(x,t)$ řešením rovnice (8.1) na $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, pak pro libovolné pevné λ je také funkce $u\,(\lambda x, \lambda^2 t)$ řešením (8.1). Uvažujme proto

$$u\,(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \tag{8.3}$$

kdy kromě funkce $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je třeba určit také hodnoty konstant $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dosazením (8.3) do (8.1) s použitím

$$\begin{aligned}
u\,(x,t) &= \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x_1}{t^\beta}, \ldots, \frac{x_n}{t^\beta}\right),\\
u_t\,(x,t) &= \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) - \frac{\beta}{t^{\alpha+\beta+1}} x D v\left(\frac{x}{t^\beta}\right),\\
u_{x_i}\,(x,t) &= \frac{1}{t^{\alpha+\beta}} v_{x_i}\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \quad i = 1, \ldots, n,\\
u_{x_i x_i}\,(x,t) &= \frac{1}{t^{\alpha+2\beta}} v_{x_i x_i}\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \quad i = 1, \ldots, n,\\
\Delta u\,(x,t) &= \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = \frac{1}{t^{\alpha+2\beta}} \Delta v\left(\frac{x}{t^\beta}\right)
\end{aligned}$$

získáváme

$$\alpha \cdot t^{-(\alpha+1)} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) + \beta t^{-(\alpha+1)} \frac{x}{t^\beta} D v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) = 0.$$

Položme $y = x/t^\beta$ a následně $\beta = 1/2$. Tím obdržíme

$$\alpha v\,(y) + \frac{1}{2} y D v\,(y) + \Delta v\,(y) = 0. \tag{8.4}$$

Hledejme radiálně symetrická řešení vzhledem k prostorovým proměnným, tj. předpokládejme, že $v\,(y) = w\,(|y|)$ pro $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Potom (8.4) přejde do tvaru

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0,$$

kde

$$r = |y| = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}, \quad r \neq 0, \quad {}' = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Výše stačí uvážit, že

$$\frac{\partial v(y)}{\partial y_i} = w'(r)\frac{y_i}{r}, \qquad i \in \{1, \dots, n\},$$
$$\frac{1}{2} y Dv(y) = \frac{1}{2} w'(r)\frac{y_1^2 + \cdots + y_n^2}{r} = \frac{1}{2} w'(r) \cdot r$$

a že

$$\begin{aligned}\Delta v(y) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(w'(r)\frac{y_i}{r}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(w''(r)\left(\frac{y_i}{r}\right)^2 + w'(r)\frac{1}{r} - w'(r)\frac{1}{r}\frac{y_i^2}{r^2}\right) = \\ &= w''(r) + n\frac{w'(r)}{r} - \frac{w'(r)}{r}.\end{aligned}$$

Zvolme $\alpha = n/2$. Dostáváme

$$\frac{n}{2} w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0,$$
$$\frac{n}{2} r^{n-1} w + \frac{1}{2} r^n w' + r^{n-1} w'' + (n-1) r^{n-2} w' = 0,$$
$$\left(r^{n-1} w'\right)' + \frac{1}{2}\left(r^n w\right)' = 0,$$

a tudíž

$$r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w = a$$

pro jisté $a \in \mathbb{R}$. Volme $a = 0$, což vede na

$$w' = -\frac{1}{2} r w.$$

Obecné řešení této diferenciální rovnice je

$$w(r) = b \cdot e^{-\frac{r^2}{4}}, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

Celkem dostáváme

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) = t^{-\frac{n}{2}} v\left(x t^{-\frac{1}{2}}\right) = t^{-\frac{n}{2}} w\left(|x| t^{-\frac{1}{2}}\right) = b t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Lze ověřit, že tato funkce je řešením rovnice (8.1) pro každé $b \in \mathbb{R}$.

Definice. Funkce $\Phi\colon (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0; \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t \leq 0,\ (x,t) \neq (0,0) \end{cases}$$

se nazývá *fundamentální řešení* rovnice vedení tepla (též *Greenova funkce nebo Gaussovo-Weierstrassovo jádro*).

Poznámka.

- Často se píše $\Phi(x,t) = \Phi(|x|,t)$.
- Pro každé $t > 0$ je $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\, \mathrm{d}x = 1$, neboť

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\frac{-|x|^2}{4t}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-|z|^2}\, \mathrm{d}z = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-z_i^2}\, \mathrm{d}z_i = 1.$$

Nyní uvažujme situaci, kdy prostorová proměnná je z $\mathbb{R}^n$. Úlohy, kde jako podmínka vystupuje to, že řešení nabývá v čase $t = 0$ předepsané hodnoty $g(x)$ pro $x \in \mathbb{R}^n$, se nazývají *počáteční*.

Uvažujme tedy homogenní počáteční problém

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times (0,\infty); \\ u &= g \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Řešením rovnice vedení tepla je Φ až na singularitu v počátku $(0,0)$. Z tvaru Φ je vidět, že pro libovolné pevné $y \in \mathbb{R}^n$ je také výraz $\Phi(x-y,t)$ řešením až na singularitu v $(y,0)$.

Věta. *Nechť $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ a funkce u je definována jako*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, g(y)\, \mathrm{d}y = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\, \mathrm{d}y \tag{8.6}$$

pro $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Pak platí:

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$;
2. $u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0$ *na* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$;
3. $\lim\limits_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x,t) = g(x_0)$ *pro* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka. Je-li funkce g ohraničená, spojitá, nezáporná a $g \not\equiv 0$, pak funkce u definovaná v (8.6) je kladná pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Uvažujme nehomogenní problém

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times (0,\infty); \\ u &= 0 \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Zobrazení

$$(x,t) \mapsto \Phi(x-y,t-s)$$

je řešení rovnice (8.1) pro $y \in \mathbb{R}^n$, $s \in (0,t)$. Volme s pevně. Pak je pro jistá f funkce

$$u(x,t,s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)\, f(y,s)\, \mathrm{d}y$$

řešení jednoparametrického systému

$$\begin{aligned} u_t(-,s) - \Delta u(-,s) &= 0 \qquad \text{na } \mathbb{R}^n \times (s,\infty); \\ u(-,s) &= f(-,s) \qquad \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = s\}. \end{aligned} \tag{8.8}$$

To je počáteční problém, kdy $t = 0$ je nahrazeno obecným okamžikem $t = s$. V ODE je známa metoda variace konstant umožňující pomocí obecného řešení homogenní maticové rovnice $x' = A(t)\,x$ získat řešení rovnice $y' = A(t)\,y + b(t)$. Tato metoda je speciálním případem tzv. *Duhamelova principu.* Duhamelův princip tvrdí, že řešení $u(-)$ problému (8.7) lze získat integrací řešení $u(-, s)$ problému (8.8) přes s.

Věta. *Nechť* $f \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, *kde* $C^{2,1}(\bar{U}) = \{f : \bar{U} \to \mathbb{R};\ f, D_x f, D_x^2 f, f_t \in C(\bar{U})\}$ *je funkce s kompaktním nosičem, tj.* $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. *Definujme*

$$u(x,t) = \int_0^t u(x,t,s)\ \mathrm{d}s = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t-s)\, f(y,s)\ \mathrm{d}y\, \mathrm{d}s =$$
$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\, f(x-y, t-s)\ \mathrm{d}y\, \mathrm{d}s = \int_0^t \frac{1}{[4\pi(t-s)]^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s)\ \mathrm{d}y\, \mathrm{d}s$$

pro $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. *Pak platí:*

1. $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$;
2. $u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t)$ *pro* $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$;
3. $\lim\limits_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x,t) = 0$ *pro* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Kombinace výše uvedených dvou vět nám dává řešení problému

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times (0,\infty); \qquad u = g \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \tag{8.9}$$

kde $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ a $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Řešení (8.9) získáváme ve tvaru

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, g(y)\ \mathrm{d}y + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t-s)\, f(y,s)\ \mathrm{d}y\, \mathrm{d}s.$$

Nyní se budeme zabývat situacemi, kdy je obor, na kterém uvažujeme řešení, omezen. Mluví se o *počáteční a okrajové úloze.*

Definice. Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a ohraničená množina a nechť $T > 0$. *Parabolickým válcem* označujeme množinu

$$U_T = U \times (0, T]$$

a dále klademe

$$\Gamma_T = \overline{U_T} \setminus U_T.$$

Při zkoumání Laplaceovy rovnice jsme zjistili, že harmonické funkce splňují podmínky povrchového a objemového průměru. Pokud se pokusíme o to stejné v případě řešení rovnice vedení tepla, zjistíme, že formule, ve kterých by se integrovalo přes sféru či kouli, neplatí.

Definice. Pro pevné $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $r > 0$ položme

$$E(x,t,r) = \left\{(y,s) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, t)\,;\ \Phi(x-y, t-s) \geq \frac{1}{r^n}\right\}.$$

Věta. *Nechť $u \in C^{2,1}(U_T)$ je řešením rovnice (8.1). Pak platí*

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x,t,r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}s \tag{8.10}$$

pro libovolné $E(x,t,r) \subseteq U_T$.

Poznámka. Všimněme si, že pravá strana (8.10) vyžaduje znát hodnoty $u(y,s)$ pouze pro $s < t$.

Příklad. *Řešme počáteční úlohu*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \qquad \textit{na } \mathbb{R}^n \times (0,\infty)\,; \\ u &= g \qquad \textit{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Fourierova transformace aplikovaná vzhledem k prostorovým proměnným vede na

$$\begin{aligned} \widehat{u}_t + |y|^2 \widehat{u} &= 0 \qquad \textit{pro } t > 0; \\ \widehat{u} &= \widehat{g} \qquad \textit{pro } t = 0. \end{aligned}$$

To lze pro každé pevné y řešit se ziskem

$$\widehat{u}(y,t) = \mathrm{e}^{-|y|^2 t}\, \widehat{g}(y)\,.$$

Platí tak

$$u = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\, g * F,$$

kde $\widehat{F}(y) = \mathrm{e}^{-t|y|^2}$. Tedy

$$F(x) = \left(\mathrm{e}^{-t|y|^2}\right)^{\!\vee}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy - t|y|^2} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{(2t)^{\frac{n}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

To již dává

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \,\mathrm{d}y$$

pro $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Věta. *Nechť funkce $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ je řešením rovnice (8.1) na U_T.*

1. *Platí*

$$\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

2. *Je-li navíc množina U souvislá a existuje-li bod $(x_0, t_0) \in U_T$ takový, že*

$$u(x_0, t_0) = \max_{\overline{U_T}} u,$$

pak je u konstantní na $\overline{U_{t_0}}$.

Poznámka.

- První část věty se nazývá *slabý princip maxima* a druhá část *silný princip maxima.*
- Analogické tvrzení platí, pokud se maximum nahradí za minimum na všech místech.
- Pokud řešení u nabude svého maxima (či minima) v nějakém vnitřním bodě (x_0, t_0), potom bude funkce u konstantní ve všech bodech (x, t) souvislé komponenty obsahující bod (x_0, t_0), kde $t \leq t_0$. To je v souladu s fyzikální interpretací.

Důkaz. Uvažujme část 2. Nechť existuje $(x_0, t_0) \in U_T$ takové, že

$$M = u\,(x_0, t_0) = \max_{\overline{U_T}} u.$$

Protože $U_T = U \times (0, T]$, kde U je otevřená, tak pro všechna dostatečně malá $r > 0$ bude $E\,(x_0, t_0, r) \subseteq U_T$. Podle vlastnosti průměru tak bude platit

$$M = u\,(x_0, t_0) = \frac{1}{4r^n} \iint\limits_{E(x_0,t_0,r)} u\,(y, s)\,\frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \leq M \frac{1}{4r^n} \iint\limits_{E(x_0,t_0,r)} \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = M.$$

Kdyby existoval bod $(y, s) \in E\,(x_0, t_0, r)$ takový, že $u\,(y, s) < M$, tak by vzhledem ke spojitosti u platilo $M = u\,(x_0, t_0) < M$, což není možné. Musí tedy být $u \equiv M$ na celém $E\,(x_0, t_0, r)$.

Označme jako $V \subseteq U$ množinu všech bodů $x \in U$, pro které existuje $\{x_0, \ldots, x_m = x\} \subseteq U$ taková posloupnost, že úsečka spojující body x_{i-1}, x_i leží celá v U pro $i \in \{1, \ldots, m\}$. Zřejmě je V neprázdná. Nechť je $\{y_k\}_{k=0}^{\infty} \subset V$ s vlastností, že $y_k \to y \in U$ pro $k \to \infty$. Neboť je U otevřená, existuje $s > 0$ tak malé, že $B\,(y, s) \subseteq U$. Zvláště úsečka spojující body $y, y_{\overline{k}}$ pro dost velká $\overline{k}$ leží v U. Množina V je uzavřená v U; zřejmě je také otevřená v U. Souvislost U tak dává $U = V$.

Zvolme libovolně bod (x, t), kde $x \in U$, $0 < t < t_0$. Vzhledem k výše dokázanému existuje konečná posloupnost bodů $\{x_0, \ldots, x_m = x\} \subset U$ taková, že všechny úsečky v $\mathbb{R}^n$ spojující body x_{i-1}, x_i leží v U pro $i \in \{1, \ldots, m\}$. Zvolme časy $t_0 > t_1 > \cdots > t_m = t$. Potom úsečky $L_i \subset \mathbb{R}^{n+1}$ spojující body $(x_{i-1}, t_{i-1})\,, (x_i, t_i)$ leží v U_{t_0} pro $i \in \{1, \ldots, m\}$. Položme

$$\tau_1 = \inf\left\{s \geq t_1;\ u\,(x, t) = M,\ (x, t) \in L_1,\ s \leq t \leq t_0\right\}.$$

Protože funkce u je spojitá, nabývá na L_1 svého minima. Předpokládejme, že $\tau_1 > t_1$. Pak $u\,(\xi_1, \tau_1) = M$, kde $(\xi_1, \tau_1) \in L_1$. To podle výše uvedeného znamená, že $u = M$ na $E\,(\xi_1, \tau_1, r)$ pro všechna dostatečně malá $r > 0$. Ovšem $E\,(\xi_1, \tau_1, r)$ obsahuje body $(\overline{x}, \overline{t}) \in L_1$, kdy $\overline{t} < \tau_1$. To je spor. Nutně tedy $\tau_1 = t_1$ a $u \equiv M$ na L_1. Opakováním této úvahy pro konečně mnoho úseček L_i zjistíme, že $u\,(x, t) = M$. Bod (x, t) byl libovolný, u spojité na $\overline{U_T}$. Celkem je tedy $u \equiv M$ na $\overline{U_{t_0}}$.

První část plyne z dokázané druhé části. Stačí uvážit souvislou komponentu množiny U. □

Věta. *Existuje nejvýše jedno řešení $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ počáteční a okrajové úlohy*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \qquad \textit{na } U_T; \\ u &= g \qquad \textit{na } \Gamma_T. \end{aligned}$$

Důkaz. Důkaz povedeme sporem. Nechť u_1, u_2 jsou dvě různá řešení uvažované úlohy. Potom funkce $u_{12} = u_1 - u_2$ a $u_{21} = u_2 - u_1$ jsou řešeními úlohy

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{na } U_T; \\ u &= 0 \quad \text{na } \Gamma_T. \end{aligned}$$

Podle principu maxima je $u_{12} \leq 0$, $u_{21} \leq 0$ na $\overline{U_T}$, což znamená, že $u_1 = u_2$. □

Věta. *Nechť U je souvislá ohraničená a otevřená množina a funkce $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ je řešením úlohy*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \quad \textit{na } U_T; \\ u &= 0 \quad \textit{na } \partial U \times [0,T]; \\ u &= g \quad \textit{na } U \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

kde funkce g je nezáporná. Je-li funkce g kladná někde na U, pak je u kladná na U_T.

Poznámka. Předchozí věta se v literatuře označuje jako *šíření tepla nekonečnou rychlostí.*

Už umíme dokázat jednoznačnost řešení počáteční a okrajové úlohy na omezené množině. Nyní ji chceme dokázat pro $U = \mathbb{R}^n$, tj. v případě počáteční úlohy. Protože je nyní zkoumaná množina neomezená, je třeba uvažovat další podmínky, které by omezovaly chování řešení.

Věta. *Nechť $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ je řešením počáteční úlohy*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \quad \textit{na } \mathbb{R}^n \times (0,T]; \\ u &= g \quad \textit{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

a splňuje tzv. odhad růstu, tj. existují čísla $a, A > 0$ taková, že

$$|u\,(x,t)\,| \leq A e^{a \cdot |x|^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T]\,.$$

Potom je

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

Věta. *Existuje nejvýše jedno řešení $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ počáteční úlohy*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \textit{na } \mathbb{R}^n \times (0,T]; \\ u &= g \quad \textit{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned} \tag{8.11}$$

splňující nerovnost

$$|u\,(x,t)\,| \leq A e^{a \cdot |x|^2} \tag{8.12}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$ a jisté konstanty $A, a > 0$.

Důkaz. Nechť existují dvě různá řešení u_1, u_2 úlohy (8.11) splňující (8.12). Znovu uvažujme funkce $u_{12} = u_1 - u_2$ a $u_{21} = u_2 - u_1$. Tyto funkce jsou řešeními úlohy

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times (0,T]; \\ u &= 0 \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

a splňují (8.12) pro jisté konstanty. Podle principu maxima pro počáteční úlohu jsou funkce $u_1 - u_2$ a $u_2 - u_1$ nekladné na $\mathbb{R}^n \times [0,T]$. Tedy $u_1 \equiv u_2$ na $\mathbb{R}^n \times [0,T]$, což je spor. □

Poznámka.

- Lze dokázat, že úloha

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times (0,T]; \\ u &= 0 \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{aligned}$$

  má nekonečně mnoho řešení a že právě s výjimkou nulového řešení všechna tato řešení rostou a klesají velice rychle.

- Jediné řešení, které se fyzikálně interpretuje, je právě to nulové. Podmínka „nejvýše exponenciálního růstu“ je tedy vynucena možnými i známými aplikacemi.

- Rovnice vedení tepla má mnoho charakteristických vlastností, které nelze uspokojivě vnímat v aplikacích. Základní vlastností rovnice vedení tepla je však její schopnost „vyhlazování poruch“. To je popsáno v následující větě.

Věta. *Nechť funkce $u \in C^{2,1}(U_T)$ je řešením (8.1). Potom $u \in C^\infty(U_T)$.*

Nadále budeme předpokládat, že U je otevřená, ohraničená množina v $\mathbb{R}^n$, její hranice je třídy C^1 a že je pevně dán tzv. *terminální čas* $T > 0$.

Věta. *Počáteční a okrajová úloha*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \textit{na } U_T; \\ u &= g \quad \textit{na } \Gamma_T \end{aligned}$$

má nejvýše jedno řešení $u \in C^{2,1}(\overline{U_T})$.

Důkaz. Nechť u_1, u_2 jsou dvě řešení zadané úlohy, která jsou třídy $C^{2,1}(\overline{U_T})$. Funkce $w = u_1 - u_2$ řeší úlohu

$$\begin{aligned} w_t - \Delta w &= 0 \quad \text{na } U_T; \\ w &= 0 \quad \text{na } \Gamma_T. \end{aligned}$$

Pro $t \in [0,T]$ definujme funkci

$$e\,(t) = \int_U w^2\,(x,t)\;\mathrm{d}x.$$

Pro $t \in (0,T)$ je

$$\begin{aligned} e'\,(t) = \int_U 2w\,(x,t)\,w_t\,(x,t)\;\mathrm{d}x = 2\int_U w\,(x,t)\,\Delta w\,(x,t)\;\mathrm{d}x = \\ = 2\int_{\partial U} \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} w\,\mathrm{d}S - 2\int_U Dw \cdot Dw\,\mathrm{d}x = -2\int_U |Dw|^2\,\mathrm{d}x \le 0. \end{aligned}$$

Podle definice funkce e tak je $0 \le e\,(t) \le e\,(0) = 0$, $t \in (0,T]$. To ovšem dává $w \equiv 0$ na U_T, tj. $u_1 \equiv u_2$. $\square$

Dále se věnujme tzv. *problému zpětné jednoznačnosti*, který je obsahem následující věty.

Věta. *Nechť funkce* $u \in C^2(\overline{U_T})$ *je řešením úlohy*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \qquad \text{na } U_T; \\ u &= g \qquad \text{na } \partial U \times [0,T]\,. \end{aligned}$$

Nechť funkce $\widetilde{u} \in C^2(\overline{U_T})$ *je řešením úlohy*

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_t - \Delta u &= f \qquad \text{na } U_T; \\ \widetilde{u} &= g \qquad \text{na } \partial U \times [0,T]\,. \end{aligned}$$

Jestliže $u\,(x,T) = \widetilde{u}\,(x,T)$, $x \in U$, *potom* $u \equiv \widetilde{u}$ *na* U_T.

Důkaz. Položme $w = u - \widetilde{u}$ a definujme funkci $e\colon (0,T] \to \mathbb{R}$ jako

$$e\,(t) = \int\limits_U w^2\,(x,t)\ \mathrm{d}x.$$

Stejně jako v důkazu předchozí věty lze ukázat, že

$$e'\,(t) = -2 \int\limits_U |Dw|^2\,\mathrm{d}x.$$

Dále pro $t \in (0,T)$ je

$$e''\,(t) = -4 \int\limits_U Dw \cdot Dw_t\,\mathrm{d}x = -4 \left(\int\limits_{\partial U} \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} w_t\,\mathrm{d}S - \int\limits_U \Delta w \cdot w_t\,\mathrm{d}x \right) = 4 \int\limits_U (\Delta w)^2\ \mathrm{d}x.$$

Proto pro $t \in (0,T)$ je

$$\begin{aligned} \left[e'\,(t)\right]^2 &= 4 \left(\int\limits_U |Dw|^2\,\mathrm{d}x \right)^2 = 4 \left(\int\limits_{\partial U} \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} w\,\mathrm{d}S - \int\limits_U w \Delta w\,\mathrm{d}x \right)^2 = \\ &= 4 \left(\int\limits_U w \Delta w\,\mathrm{d}x \right)^2 \le \int\limits_U w^2\,\mathrm{d}x \left(4 \int\limits_U (\Delta w)^2\ \mathrm{d}x \right) = e\,(t) \cdot e''\,(t)\,, \end{aligned}$$

kde jsme použili Hölderovu (Cauchyovu) nerovnost

$$\left| \int\limits_M f\,(x)\,g\,(x)\ \mathrm{d}x \right| \le \int\limits_M |f\,(x)\,g\,(x)\,|\,\mathrm{d}x \le \left(\int\limits_M f^2\,(x)\ \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_M g^2\,(x)\ \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}},$$

přičemž f, g jsou spojité a integrovatelné na M. Zopakujme, že $\left[e'\,(t)\right]^2 \le e\,(t) \cdot e''\,(t)$ pro $t \in (0,T)$. Kdyby bylo $e\,(t) = 0$ pro $t \in (0,T]$, pak by $w \equiv u - \widetilde{u} \equiv 0$ a důkaz by tím byl hotov. Předpokládejme proto, že existuje subinterval $[t_1, t_2] \in (0,T]$ takový, že $e\,(t) > 0$ pro $t \in [t_1, t_2)$ a $e\,(t_2) = 0$. Definujme funkci $F\colon [t_1, t_2) \to \mathbb{R}$ jako

$$F\,(t) = \log\left[e\,(t)\right].$$

Pro $t \in (t_1, t_2)$ platí

$$F'(t) = e'(t) \cdot \frac{1}{e(t)},$$
$$F''(t) = \frac{e''(t)\, e(t) - (e'(t))^2}{e^2(t)} \geq 0.$$

To znamená, že na intervalu (t_1, t_2) je F konvexní, a tudíž je

$$F((1-\tau)\, t_1 + \tau t_3) \leq (1-\tau)\, F(t_1) + \tau F(t_3), \qquad \tau \in (0,1),\, t_3 \in (t_1, t_2).$$

Dále získáváme

$$e((1-\tau)\, t_1 + \tau t_3) \leq [e(t_1)]^{1-\tau} \cdot [e(t_3)]^{\tau}, \qquad \tau \in (0,1),\, t_3 \in (t_1, t_2).$$

Využitím spojitosti funkce e (stejnoměrné spojitosti w na kompaktní množině) máme

$$e((1-\tau)\, t_1 + \tau t_2) \leq [e(t_1)]^{1-\tau} \cdot [e(t_2)]^{\tau}, \qquad \tau \in (0,1).$$

To je ale spor

$$0 < e((1-\tau)\, t_1 + \tau t_2) \leq [e(t_1)]^{1-\tau} \cdot 0 = 0, \qquad \tau \in (0,1).$$

Tedy $e(t) = 0$ pro $t \in [t_1, t_2]$. Důkaz je tímto hotov. $\square$

9 Vlnová rovnice

Budeme analyzovat vlnovou rovnici

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \tag{9.1}$$

a příslušnou nehomogenní rovnici

$$u_{tt} - \Delta u = f, \tag{9.2}$$

kde $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ pro otevřenou množinu U, $t > 0$, funkce $f\colon U \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ je známá (často se v literatuře uvádí $f\colon U \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$). Cílem je stanovit neznámou funkci $u\colon \overline{U} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, která vyhovuje jistým počátečním a okrajovým podmínkám. Zdůrazněme, že

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Ze zjištěných vlastností řešení Laplaceovy rovnice a rovnice vedení tepla se lze domnívat, že Laplaceův operátor Δ zajišťuje určité vlastnosti řešení (především řešení Laplaceovy rovnice a rovnice vedení tepla jsou třídy C^∞). To však není pravda.

Cesta, jak lze získat řešení n-dimenzionální vlnové rovnice, vede přes použití tzv. *d'Alembertova vzorce*, který řeší jednodimenzionální rovnice (9.1), (9.2), a metodu sférických průměrů, která umožňuje nalézt řešení pro $n > 1$. Uvažujme proto počáteční úlohu

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \quad \text{na } \mathbb{R} \times (0, \infty)\,; \\ u &= g \quad \text{na } \mathbb{R} \times \{t = 0\}; \\ u_t &= h \quad \text{na } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{aligned} \tag{9.3}$$

kde funkce g, h jsou známy. Cílem je vyjádřit u pomocí g a h.

Předpokládejme, že uvažované funkce jsou dostatečně hladké. Všimněme si, že vlnovou rovnici (9.3) lze zapsat v následujícím tvaru

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u = u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{na } \mathbb{R} \times (0, \infty)\,. \tag{9.4}$$

Označíme-li

$$v\,(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u\,(x, t)\,, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \tag{9.5}$$

můžeme (9.4) přepsat jako

$$v_t\,(x, t) + v_x\,(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0,$$

což je však transportní rovnice z 2. kapitoly (kdy je $b = (1)$). Její řešení umíme stanovit jako

$$v\,(x, t) = a\,(x - t)\,, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

přičemž $a\,(x) = v\,(x, 0)$. Dosazením do (9.5) získáváme

$$u_t\,(x, t) - u_x\,(x, t) = a\,(x - t)\,, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

což je nehomogenní transportní rovnice pro $b = (-1)$, $f(x,t) = a(x-t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Její řešení také známe jako

$$u(x,t) = \int_0^t a(x + (t-s) - s)\,\mathrm{d}s + b(x+t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)\,\mathrm{d}y + b(x+t) \tag{9.6}$$

pro $x \in \mathbb{R}$ a $t > 0$, kde $b(x) = u(x,0)$. Uvědomme si, že funkce a, b závisejí na funkci u pouze v čase $t = 0$. Můžeme tak využít počátečních podmínek se ziskem

$$\begin{aligned} b(x) &= u(x,0) = g(x), \qquad x \in \mathbb{R}; \\ a(x) &= v(x,0) = u_t(x,0) - u_x(x,0) = h(x) - g'(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Návratem k (9.6) máme

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y) - g'(y)\,\mathrm{d}y + g(x+t), \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Tedy

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{9.7}$$

Vzorec (9.7) se nazývá *d'Alembertova formule*. Tento vzorec jsme však odvodili za předpokladu, že u je dostatečně hladké řešení (9.3). Je proto nutné ověřit, že formule (9.7) udává řešení (9.3).

Věta. *Nechť $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ a funkce u je definována v (9.7). Potom platí:*

1. *$u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty))$;*
2. *$u_{tt} - u_{xx} = 0$ na $\mathbb{R} \times (0,\infty)$;*
3. *$\lim\limits_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x,t) = g(x_0)$, $\lim\limits_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u_t(x,t) = h(x_0)$ pro všechna $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Uvažujme postupně části 1.–3.

1. Lze dokázat triviálně.
2. Postupně derivujme

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \frac{1}{2}\left[g'(x+t) - g'(x-t)\right] + \frac{1}{2}\left[h(x+t) + h(x-t)\right], \\ u_{tt}(x,t) &= \frac{1}{2}\left[g''(x+t) + g''(x-t)\right] + \frac{1}{2}\left[h'(x+t) - h'(x-t)\right], \\ u_x(x,t) &= \frac{1}{2}\left[g'(x+t) + g'(x-t)\right] + \frac{1}{2}\left[h(x+t) - h(x-t)\right], \\ u_{xx}(x,t) &= \frac{1}{2}\left[g''(x+t) + g''(x-t)\right] + \frac{1}{2}\left[h'(x+t) - h'(x-t)\right]. \end{aligned}$$

3. Lze dokázat triviálně.

$\square$

Poznámka. Když uvážíme výpočty v předchozím důkazu, nabízí se pro libovolné $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ položit

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t) \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{9.8}$$

kdy dostáváme

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= F'(x+t) - G'(x-t), & u_x(x,t) &= F'(x+t) + G'(x-t), \\ u_{tt}(x,t) &= F''(x+t) + G''(x-t), & u_{xx}(x,t) &= F''(x+t) + G''(x-t) \end{aligned}$$

pro $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. To znamená, že dokonce každá funkce ve tvaru (9.8) je řešením vlnové rovnice (9.1), když $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ a $n = 1$.

Poznámka. Z tvaru d'Alembertovy formule plyne, že při $g \in C^k(\mathbb{R})$, $h \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ pro $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ je uvažované řešení $u \in C^k(\mathbb{R})$, ale není obecně třídy $C^{k+1}(\mathbb{R})$. To znamená, že nedochází k okamžitému vyhlazování vstupních dat.

Již umíme řešit počáteční úlohu pro jednodimenzionální vlnovou rovnici. Jednoduchá úvaha nám umožní řešit také počáteční a okrajovou úlohu pro tuto rovnici na polopřímce $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Uvažujme problém

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{na } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty); \\ u &= g && \text{na } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}; \\ u_t &= h && \text{na } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}; \\ u &= 0 && \text{na } \{x = 0\} \times (0,\infty), \end{aligned} \tag{9.9}$$

kde $g, h \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ jsou dané funkce takové, že $g(0) = h(0) = 0$.

Úlohu (9.9) lze řešit tak, že ji převedeme na úlohu (9.3) lichým rozšířením funkcí u, g, h na celé $\mathbb{R}$, tj. položíme

$$\begin{aligned} &\widetilde{u}(x,t) = u(x,t), && x > 0,\ t \geq 0; && \widetilde{g}(x) = g(x), && x \geq 0; && \widetilde{h}(x) = h(x), && x \geq 0; \\ &\widetilde{u}(x,t) = 0, && x = 0,\ t \geq 0; && \widetilde{g}(x) = -g(-x), && x < 0; && \widetilde{h}(x) = -h(-x), && x < 0; \\ &\widetilde{u}(x,t) = -u(-x,t), && x < 0,\ t \geq 0. \end{aligned}$$

Po rozšíření úloha (9.9) přejde na

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_{tt}(x,t) - \widetilde{u}_{xx}(x,t) &= 0, && \mathbb{R} \times (0,\infty); \\ \widetilde{u}(x,t) &= \widetilde{g}(x), && \mathbb{R} \times \{t = 0\}; \\ \widetilde{u}_t(x,t) &= \widetilde{h}(x) && \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Nyní formulce (9.7) dává řešení původní úlohy (9.9) ve tvaru

$$\widetilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left[\widetilde{g}(x+t) + \widetilde{g}(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \widetilde{h}(y)\, \mathrm{d}y,$$

tj.

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)\ \mathrm{d}y, & 0 \le t \le x; \\ \frac{1}{2}\left[g(x+t) - g(t-x)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{x+t} h(y)\ \mathrm{d}y, & 0 \le x \le t, \end{cases} \tag{9.10}$$

neboť pro $0 \le x \le t$ je

$$\int\limits_{x-t}^{x+t} \widetilde{h}(y)\ \mathrm{d}y = \int\limits_{x-t}^{0} \widetilde{h}(y)\ \mathrm{d}y + \int\limits_{0}^{x+t} \widetilde{h}(y)\ \mathrm{d}y = \int\limits_{x-t}^{0} -h(-y)\ \mathrm{d}y + \int\limits_{0}^{x+t} h(y)\ \mathrm{d}y =$$
$$= \int\limits_{t-x}^{0} h(y)\ \mathrm{d}y + \int\limits_{0}^{x+t} h(y)\ \mathrm{d}y = \int\limits_{t-x}^{x+t} h(y)\ \mathrm{d}y.$$

Vzorec (9.10) se také někdy označuje jako *d'Alembertova formule.*

Nadále budeme předpokládat, že $n > 1$, $m \ge 2$ a že $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ je řešení počáteční úlohy

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times (0,\infty)\,; \\ u &= g \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}; \\ u_t &= h \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{aligned} \tag{9.11}$$

přičemž g je třídy alespoň C^{m+1} a h alespoň C^m.

Cílem bude odvodit explicitní formuli pro řešení u obsahující pouze funkce g a h. Odvození bude probíhat v několika krocích. Nejdříve si zavedeme místo funkcí u, g, h jejich průměry. Průměr z funkce u pak bude řešením *Eulerovy-Poissonovy-Darbouxovy* PDE, která se dá v případě lichosti n převést na jednodimenzionální rovnici. Tu vyřešíme použitím d'Alembertova vzorce, čímž získáme tzv. *Kirchhoffův vzorec.* Případ sudého n převedeme na vyřešený případ přidáním jedné proměnné a získáme tzv. *Poissonův vzorec.*

Definice. Pro $x \in \mathbb{R}^n$, $t \ge 0$, $r > 0$ položíme

$$U(x,r,t) = ⨍_{\partial B(x,r)} u(y,t)\ \mathrm{d}S(y), \tag{9.12}$$

$$G(x,r,t) = ⨍_{\partial B(x,r)} g(y)\ \mathrm{d}S(y), \qquad H(x,r,t) = ⨍_{\partial B(x,r)} h(y)\ \mathrm{d}S(y). \tag{9.13}$$

Lemma. *Nechť u je řešením problému (9.11). Pro libovolné $x \in \mathbb{R}^n$ je $U \in C^m(\mathbb{R}_+ \times [0,\infty))$ a platí*

$$\begin{aligned} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r}U_r &= 0 \quad \textit{na } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty)\,; \\ U &= G \quad \textit{na } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}; \\ U_t &= H \quad \textit{na } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}. \end{aligned} \tag{9.14}$$

Budeme zkoumat vlnovou rovnici pro liché $n > 1$. Případ obecného lichého n je technicky komplikovaný, a proto se soustředíme na $n = 3$.

Předpokládejme, že funkce $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ řeší (9.11). Označme

$$\widetilde{U} = rU, \quad \widetilde{G} = rG, \quad \widetilde{H} = rH,$$

kde funkce U, G, H jsou definovány v (9.12), (9.13). Ukážeme, že platí (pro každé pevné $x \in \mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_{tt} - \widetilde{U}_{rr} &= 0 && \text{na } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty)\,; \\ \widetilde{U} &= \widetilde{G} && \text{na } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\}; \\ \widetilde{U}_t &= \widetilde{H} && \text{na } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\}; \\ \widetilde{U} &= 0 && \text{na } \{r=0\} \times (0,\infty)\,. \end{aligned}$$

Snadno získáváme

$$\widetilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r\left[U_{rr} + \frac{2}{r}U_r\right] = rU_{rr} + 2U_r = \frac{\partial}{\partial r}\left[rU_r + U\right] = \widetilde{U}_{rr}$$

a zbývající je zřejmé.

Z d'Alembertovy formule (9.10) pro $x \in \mathbb{R}^3$, $0 < r \le t$ plyne

$$\widetilde{U}(x,r,t) = \frac{1}{2}\left[\widetilde{G}(x,r+t,0) - \widetilde{G}(x,t-r,0)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{t-r}^{r+t} \widetilde{H}(x,y,0)\ \mathrm{d}y. \tag{9.15}$$

Z (9.12) víme, že

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0^+} U(x,r,t)\,, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t \ge 0.$$

Proto z definice $\widetilde{U}$ a (9.15) dostáváme

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{r}\widetilde{U}(x,r,t) = \\ &= \lim_{r\to 0^+}\left[\frac{\widetilde{G}(x,r+t,0) - \widetilde{G}(x,t-r,0)}{2r} + \frac{1}{2r}\int\limits_{t-r}^{r+t}\widetilde{H}(x,y,0)\ \mathrm{d}y\right] = \widetilde{G}_r(x,t,0) + \widetilde{H}(x,t,0) \end{aligned}$$

pro $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$. Dále z definice G a H v (9.13) plyne

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t \cdot \fint_{\partial B(x,t)} g(y)\ \mathrm{d}S(y)\right) + t \cdot \fint_{\partial B(x,t)} h(y)\ \mathrm{d}S(y) \tag{9.16}$$

pro $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$. Platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\fint_{\partial B(x,t)} g(y)\ \mathrm{d}S(y) &= \frac{\partial}{\partial t}\fint_{\partial B(0,1)} g(x+zt)\ \mathrm{d}S(z) = \\ &= \fint_{\partial B(0,1)} Dg(x+tz)\cdot z\,\mathrm{d}S(z) = \fint_{\partial B(x,t)} Dg(y)\,\frac{y-x}{t}\,\mathrm{d}S(y), \end{aligned}$$

což po dosazení do (9.16) dává

$$u(x,t) = \fint_{\partial B(x,t)} g(y)\,\mathrm{d}S(y) + t\cdot\frac{\partial}{\partial t}\fint_{\partial B(x,t)} g(y)\,\mathrm{d}S(y) + t\cdot\fint_{\partial B(x,t)} h(y)\,\mathrm{d}S(y) = \tag{9.17}$$
$$= \fint_{\partial B(x,t)} \left[t\cdot h(y) + g(y) + Dg(y)\cdot(y-x)\right]\mathrm{d}S(y)$$

pro $x\in\mathbb{R}^3$, $t>0$.

Formule (9.17) se nazývá *Kirchhoffův vzorec* pro řešení počáteční úlohy (9.11) v $\mathbb{R}^3$. Pro obecné liché $n = 2k+1$, kde $k\in\mathbb{N}$, lze dokázat, že dostatečně hladké řešení počáteční úlohy (9.11) musí splňovat formuli

$$u(x,t) = \frac{1}{(n-2)!!}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} g\,\mathrm{d}S\right) + \right. \tag{9.18}$$
$$\left. + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} h\,\mathrm{d}S\right)\right],$$

kde $x\in\mathbb{R}^n$, $t>0$, přičemž $(n-2)!! = (n-2)\cdot(n-4)\cdots 3\cdot 1$.

Věta. *Nechť $n\geq 3$ je liché, $g\in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$ a $h\in C^m(R^n)$ pro $m=\frac{n+1}{2}$. Potom funkce u definovaná v (9.18) má následující vlastnosti:*

1. *$u\in C^2(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$;*
2. *$u_{tt}-\Delta u = 0$ na $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$;*
3. *$\lim\limits_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x,t) = g(x_0)$, $\lim\limits_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u_t(x,t) = h(x_0)$ pro všechna $x_0\in\mathbb{R}^n$.*

Důkaz. Uvažujme postupně části 1.–3.

1. Platí triviálně (viz (9.18)).
2. Omezíme se pouze na případ $n=3$. Předpokládejme, že $g\equiv 0$. Pak je

$$u(x,t) = t\cdot\fint_{\partial B(x,t)} h(y)\,\mathrm{d}S(y) = t\cdot H(x,t,0).$$

Pro jednoduchost budeme dále psát $H(x,t) = H(x,t,0)$. Platí

$$u_t(x,t) = H(x,t) + t\cdot H_t(x,t),$$
$$u_{tt}(x,t) = 2\cdot H_t(x,t) + t\cdot H_{tt}(x,t) = \frac{1}{t}\left[2tH_t + t^2\frac{\partial}{\partial t}H_t\right] = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\left[t^2H_t\right] \tag{9.19}$$

pro $x\in\mathbb{R}^n$, $t>0$. Dále je

$$H_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\fint_{\partial B(x,t)} h(y)\,\mathrm{d}S(y) = \frac{\partial}{\partial t}\fint_{\partial B(0,1)} h(x+tz)\,\mathrm{d}S(z) =$$
$$= \fint_{\partial B(0,1)} Dh(x+tz)\cdot z\,\mathrm{d}S(z) = \fint_{\partial B(x,t)} Dh(y)\,\frac{y-x}{t}\,\mathrm{d}S(y)$$

pro $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Odtud

$$H_t(x,t) = \frac{1}{3\alpha(3)\,t^2} \int\limits_{\partial B(x,t)} Dh(y) \cdot \vec{n}(y)\ \mathrm{d}S(y) = \frac{1}{3\alpha(3)\,t^2} \int\limits_{\partial B(x,t)} \frac{\partial h(y)}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}S(y) =$$

$$= \frac{1}{3\alpha(3)\,t^2} \int\limits_{B(x,t)} \Delta h(y)\ \mathrm{d}y,$$

což po dosazení do (9.19) dává

$$u_{tt}(x,t) = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{3\alpha(3)} \int\limits_{B(x,t)} \Delta h(y)\ \mathrm{d}y\right) = \frac{1}{3\alpha(3)\,t}\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{B(x,t)} \Delta h(y)\ \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{3\alpha(3)\,t} \int\limits_{\partial B(x,t)} \Delta h(y)\ \mathrm{d}S(y) = t \cdot \Delta \fint_{\partial B(x,t)} h(y)\ \mathrm{d}S(y) = \Delta\left(t \cdot H(x,t)\right) = \Delta u(x,t)$$

pro $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$. Je-li $g \equiv 0$, pak $u_{tt} - \Delta u = 0$ na $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$. Podobně lze postupovat pro $h \equiv 0$ a pomocí „srovnatelných“ úprav potvrdit, že máme řešení vlnové rovnice. Obecný případ vyplyne z linearity rovnice.

3. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^3$ je pevně dané. Dostáváme

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x,t) = \lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)} \fint_{\partial B(x,t)} \left[t \cdot h(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y-x)\right]\ \mathrm{d}S(y) =$$

$$= \lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)} \fint_{\partial B(0,1)} \left[t \cdot h(x+zt) + g(x+zt) + t \cdot Dg(x+zt) \cdot z\right]\ \mathrm{d}S(z),$$

tj.

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x,t) = \fint_{\partial B(0,1)} g(x_0)\ \mathrm{d}S(z) = g(x_0)\,.$$

Podobně se dá obdržet druhá z limit.

□

Případ obecného sudého n je také technicky komplikovaný, a proto rozebereme pouze případ $n = 2$. Předpokládejme, že $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty))$ řeší počáteční úlohu (9.11). V tomto případě však není známa transformace, která by umožňovala Eulerovu-Poissonovu-Darbouxovu rovnici použít. Proto budeme dvoudimenzionální úlohu chápat jako úlohu třídimenzionální, ve které se třetí z prostorových proměnných nevyskytuje.

Označme

$$\overline{u}(x_1,x_2,x_3,t) = u(x_1,x_2,t)\,, \qquad x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R},\ t \ge 0. \tag{9.20}$$

Uvážením počáteční úlohy (9.11) zjistíme, že musí platit

$$\begin{aligned} \overline{u}_{tt} - \Delta\overline{u} &= 0 \quad \text{na } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)\,; \\ \overline{u} &= \overline{g} \quad \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t=0\}; \\ \overline{u}_t &= \overline{h} \quad \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t=0\}, \end{aligned} \tag{9.21}$$

kde $\overline{g}(x_1,x_2,x_3) = g(x_1,g_2)$, $\overline{h}(x_1,x_2,x_3) = h(x_1,x_2)$ pro $x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}$. Označme ještě

$$\begin{aligned} x &= (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \\ \overline{x} &= (x_1,x_2,0) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{9.22}$$

Kirchhoffův vzorec vyjadřuje řešení úlohy (9.21) ve tvaru (spolu s (9.20), (9.22))

$$u(x,t) = \overline{u}(\overline{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t \cdot \fint_{\partial B_3(\overline{x},t)} \overline{g}(\overline{y})\,\mathrm{d}S(\overline{y})\right) + t \cdot \fint_{\partial B_3(\overline{x},t)} \overline{h}(\overline{y})\,\mathrm{d}S(\overline{y}), \tag{9.23}$$

kde $B_3(\overline{x},t)$ je koule v $\mathbb{R}^3$ se středem $\overline{x}$ a poloměrem t. Lze však přejít ke kouli $B_2(x,t) \subseteq \mathbb{R}^2$, neboť

$$\begin{aligned} \fint_{\partial B_3(\overline{x},t)} \overline{g}(\overline{y})\,\mathrm{d}S(\overline{y}) &= \frac{1}{3\alpha(3)\,t^{3-1}} \int\limits_{\partial B_3(\overline{x},t)} \overline{g}(\overline{y})\,\mathrm{d}S(\overline{y}) = \frac{1}{4\pi t^2} \int\limits_{\partial B_3(\overline{x},t)} \overline{g}(\overline{y})\,\mathrm{d}S(\overline{y}) = \\ &= \frac{1}{2\pi t} \int\limits_{B_2(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{t}{2} \fint_{B_2(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Zcela stejně se upraví také druhý integrál (9.23). Celkem máme

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^2 \cdot \fint_{B_2(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\,\mathrm{d}y\right) + \frac{t^2}{2} \fint_{B_2(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\,\mathrm{d}y. \tag{9.24}$$

Protože

$$\begin{aligned} t^2 \fint_{B_2(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{B_2(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{B(0,1)} \frac{g(x+tz)}{t\sqrt{1-|z|^2}}\,t^2\,\mathrm{d}z = t \cdot \fint_{B_2(0,1)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}}\,\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

lze první výraz v (9.24) upravit na

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(t^2 \fint_{B_2(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\,\mathrm{d}y\right) &= \fint_{B_2(0,1)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}}\,\mathrm{d}z + t \cdot \fint_{B_2(0,1)} \frac{Dg(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}} \cdot z\,\mathrm{d}z = \\ &= t \cdot \fint_{B_2(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,\mathrm{d}y + t \cdot \fint_{B_2(x,t)} \frac{Dg(y)(y-x)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Nyní již můžeme (9.24) vyjádřit jediným integrálem jako

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{B_2(x,t)} \frac{t \cdot g(y) + t^2 \cdot h(y) + t \cdot Dg(y) \cdot (y-x)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,\mathrm{d}y \tag{9.25}$$

pro $x \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$. Vzorec (9.25) se označuje jako *Poissonův*. Pro obecné sudé $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$, lze ukázat, že dostatečně hladké řešení počáteční úlohy (9.11) musí splňovat

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{n!!}\Bigg[&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^n \fint_{B(x,t)} \frac{g(y)\,\mathrm{d}y}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^n \fint_{B(x,t)} \frac{h(y)\,\mathrm{d}y}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{9.26}$$

Pro $n = 2$ tato formule samozřejmě souhlasí s (9.25) a také se označuje jako *Poissonův vzorec*. Podobně jako pro lichá $n > 1$ je třeba ověřit, že (9.26) zadává skutečně řešení úlohy (9.11). To je obsahem následující věty, kterou lze dokázat podobně jako v případě liché dimenze.

Věta. *Nechť n je sudé, $g \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$ a $h \in C^m(\mathbb{R}^n)$ pro $m = \frac{n+2}{2}$. Potom funkce u definovaná v (9.26) má následující vlastnosti:*

1. $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$;
2. $u_{tt} - \Delta u = 0$ *na* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$;
3. $\lim\limits_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x,t) = g(x_0)$, $\lim\limits_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u_t(x,t) = h(x_0)$ *pro všechna* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka.

1. Zatímco v případě lichého $n > 1$ stačí k výpočtu hodnoty $u(x,t)$ znát hodnoty g, h a jejich derivací pouze na sféře $\partial B(x,t)$, v případě sudého n potřebujeme znát hodnoty g, h a jejich derivací na celé kouli $B(x,t)$.
2. Protože pro $n > 1$ obsahuje formule řešení derivace počátečních dat, tak již v libovolně malém čase $t > 0$ nemusí být řešení počáteční úlohy (9.11) tak hladké jako funkce g.
3. Z bodu 1 této poznámky a tvaru získaných formulí plyne, že podobně jako pro $n = 1$ se počáteční poruchy šíří konečnou rychlostí.
4. Z (9.18) a (9.26) plyne, že je-li $n \geq 3$ liché, pak počáteční data g, h v bodě $x \in \mathbb{R}^n$ ovlivní hodnoty řešení pouze na hranici kuželu
$$C = \left\{(y,t) \in \mathbb{R}^{n+1};\, t > 0,\, |x-y| \leq t\right\},$$
tj. na $\{(y,t) \in \mathbb{R}^{n+1};\, t > 0,\, |x-y| = t\}$. Pro $n \geq 2$ sudé jsou pak ovlivněny hodnoty řešení uvnitř celého kuželu C.

Přistupme k řešení počáteční úlohy pro nehomogenní vlnovou rovnici.

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times (0,\infty); \\ u &= 0 \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}; \\ u_t &= 0 \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}, \end{aligned} \tag{9.27}$$

přičemž funkce $f\colon \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ je známá (často se požaduje $f\colon \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$). Také nyní lze využít Duhamelův princip, který říká, že je-li $u = u(x,t,s)$ řešení jednoparametrické úlohy

$$\begin{aligned} u_{tt}(\_,s) - \Delta u(\_,s) &= 0 && \text{na } \mathbb{R}^n \times (s,\infty); \\ u(\_,s) &= 0 && \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t=s\}; \\ u_t(\_,s) &= f(\_,s) && \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t=s\} \end{aligned}$$

pro $s \geq 0$, potom funkce

$$u(x,t) = \int_0^t u(x,t,s)\, \mathrm{d}s, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\, t \geq 0 \tag{9.28}$$

je řešením úlohy (9.27). Poznamenejme, že pro $a > 0$ symbol $\lfloor a \rfloor$ udává tzv. celou část čísla a, kdy pro $k \in \mathbb{N}$ je $\lfloor k \rfloor = k$.

Věta. *Nechť* $f \in C^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. *Pak pro funkci* u *definovanou v* (9.28) *platí:*

1. $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$;
2. $u_{tt} - \Delta u = f$ *na* $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$;
3. $\lim\limits_{(x,t) \to (x_0, 0^+)} u(x,t) = 0$, $\lim\limits_{(x,t) \to (x_0, 0^+)} u_t(x,t) = 0$ *pro každé* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz. Uvažujme postupně části 1.–3.

1. Je-li n liché, pak $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \frac{n+1}{2}$. Je-li n sudé, pak $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \frac{n+2}{2}$. To znamená, že tvrzení plyne z předchozích vět.

2. Platí

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= u(x,t,t) + \int\limits_0^t u_t(x,t,s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_0^t u_t(x,t,s)\,\mathrm{d}s, \\
u_{tt}(x,t) &= u_t(x,t,t) + \int\limits_0^t u_{tt}(x,t,s)\,\mathrm{d}s = f(x,t) + \int\limits_0^t u_{tt}(x,t,s)\,\mathrm{d}s, \\
\Delta u(x,t) &= \int\limits_0^t \Delta u(x,t,s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_0^t u_{tt}(x,t,s)\,\mathrm{d}s, \\
u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x,t)
\end{aligned}
$$

   pro $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

3. Platí

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,t) \to (x_0, 0^+)} u(x,t) &= \int\limits_0^0 u(x,t,s)\,\mathrm{d}s = 0, \\
\lim_{(x,t) \to (x_0, 0^+)} u_t(x,t) &= \int\limits_0^0 u_t(x,t,s)\,\mathrm{d}s = 0
\end{aligned}
$$

   pro každé $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

□

Vzhledem k linearitě vlnové rovnice lze řešení počáteční úlohy

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - \Delta u = f \quad & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty);\\
u = g \quad & \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\};\\
u_t = h \quad & \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}
\end{aligned}
$$

získat jako součet řešení úlohy (9.11) a řešení úlohy (9.27).

Příklad. *Určeme řešení úlohy (9.27) pro $n = 1$, kdy d'Alembertova formule dává*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,\mathrm{d}y,$$

přičemž nyní je $g = 0$ a $h = f$. Proto

$$u(x,t,s) = \frac{1}{2}\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y,s)\,\mathrm{d}y$$

a dále

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y,s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Podobně můžeme určit řešení úlohy (9.27) pro $n = 3$, kdy Kirchhoffův vzorec dává

$$u(x,t,s) = \fint_{\partial B(x,t-s)} (t-s)\, f(y,s)\,\mathrm{d}S(y) = (t-s)\fint_{\partial B(x,t-s)} f(y,s)\,\mathrm{d}S(y).$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_0^t (t-s)\fint_{\partial B(x,t-s)} f(y,s)\,\mathrm{d}S(y)\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_0^t \frac{t-s}{3\alpha(3)(t-s)^2}\int_{\partial B(x,t-s)} f(y,s)\,\mathrm{d}S(y)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_{\partial B(x,t-s)} \frac{f(y,s)}{t-s}\,\mathrm{d}S(y)\,\mathrm{d}s = \\
&= \left|\begin{matrix} r = t-s \\ \mathrm{d}r = -\,\mathrm{d}s\end{matrix}\right| = -\frac{1}{4\pi}\int_t^0\int_{\partial B(x,r)} \frac{f(y,t-r)}{r}\,\mathrm{d}S(y)\,\mathrm{d}r = \frac{1}{4\pi}\int_{B(x,t)} \frac{f(y,t-|y-x|)}{|x-y|}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

pro $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$.

Znovu uvažujme energetickou metodu (tj. tzv. variační přístup). Budeme předpokládat, že $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je ohraničená a otevřená množina s hranicí ∂U třídy C^1. Nechť $T > 0$ je pevně zvolený terminální čas. Stejně jako u rovnice vedení tepla označme

$$\begin{aligned}
U_T &= U \times (0,T], \\
\Gamma_T &= \overline{U_T} \setminus U_T.
\end{aligned}$$

Uvažujme počáteční a okrajovou úlohu

$$\begin{aligned}
u_{tt} - \Delta u &= f && \text{na } U_T; \\
u &= g && \text{na } \Gamma_T; \\
u_t &= h && \text{na } U \times \{t = 0\}.
\end{aligned} \tag{9.29}$$

Věta. *Existuje nejvýše jedno řešení u úlohy (9.29), pro které $u \in C^2(\overline{U_T})$.*

Důkaz. Nechť funkce $u_1 \in C^2(\overline{U_T})$ je řešením úlohy (9.29). Kdyby existovalo jiné řešení $u_2 \in C^2(\overline{U_T})$, pak jejich rozdíl $w = u_1 - u_2$ je řešením úlohy

$$\begin{aligned} w_{tt} - \Delta w &= 0 \quad \text{na } U_T; \\ w &= 0 \quad \text{na } \Gamma_T; \\ w_t &= 0 \quad \text{na } U \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Definujme pomocnou funkci

$$e(t) = \frac{1}{2} \int\limits_U w_t^2(x,t) + |Dw(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x, \qquad t \in [0,T].$$

Pro $t \in (0,T)$ platí

$$e'(t) = \int\limits_U w_t w_{tt} + Dw Dw_t \, \mathrm{d}x = \int\limits_U w_t w_{tt} - w_t \Delta w \, \mathrm{d}x + \int\limits_{\partial U} \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} w_t \, \mathrm{d}S =$$

$$= \int\limits_U w_t (w_{tt} - \Delta w) \, \mathrm{d}x = 0.$$

To znamená, že $e(t) = e(0) = 0$ pro každé $t \in \overline{(0,T]}$. Proto je $w_t \equiv 0$ a $Dw \equiv 0$ na U_T, což dává $w \equiv 0$ na U_T, tj. $u_1 \equiv u_2$ na U_T, resp. na $\overline{U_T}$. □

Příklad. *Řešme v $\mathbb{C}$ počáteční úlohu pro vlnovou rovnici*

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 \quad \textit{na } \mathbb{R}^n \times (0,\infty); \\ u &= g \quad \textit{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}; \\ u_t &= 0 \quad \textit{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Fourierova transformace prováděná vzhledem k prostorovým proměnným dává

$$\begin{aligned} \widehat{u}_{tt} + |y|^2 \widehat{u} &= 0, \qquad t > 0; \\ \widehat{u} &= \widehat{g}, \qquad t = 0; \\ \widehat{u}_t &= 0, \qquad t = 0, \end{aligned}$$

což je počáteční úloha pro ODE druhého řádu s parametrem y. Její charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + |y|^2 = 0.$$

Odtud $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}|y|$. Zohledněním počátečních podmínek dostáváme řešení

$$\widehat{u} = \frac{1}{2} \widehat{g} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t|y|} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t|y|} \right).$$

Proto

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left[\widehat{g} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t|y|} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t|y|} \right) \right]^{\vee} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y) \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(xy + t|y|)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(xy - t|y|)} \right] \mathrm{d}y$$

pro $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.