



ÚVOD DO MATEMATICKÉ BIOLOGIE I.

setkání páté



prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

**UKB, pav.A29, RECETOX, dv.č.112
holcik@iba.muni.cz**

© Institut biostatistiky a analýz

MATEMATICKÁ BIOLOGIE

POPULAČNÍ BIOLOGIE A EPIDEMIOLOGIE

MATEMATICKÁ BIOLOGIE

Populační biologie se zabývá

- vzájemnými vztahy mezi jedinci
- limitní hustotou jedinců
- reprodukčním potenciálem
- délkou životního cyklu a jeho dílčích fází
- meziročními změnami uvnitř populací atd.

K čemu je to dobré?

Ochrana přírody, výroba potravin (živočišných, rostlinných) i technických plodin, produkce dřevní hmoty atd.

MATEMATICKÁ BIOLOGIE

Epidemiologie jako odvětví medicíny studuje faktory ovlivňující zdraví a nemocnost obyvatelstva. Její výsledky slouží jako poklad k zdůvodnění lékařských zásahů v zájmu veřejného zdraví a zdravotní prevence.

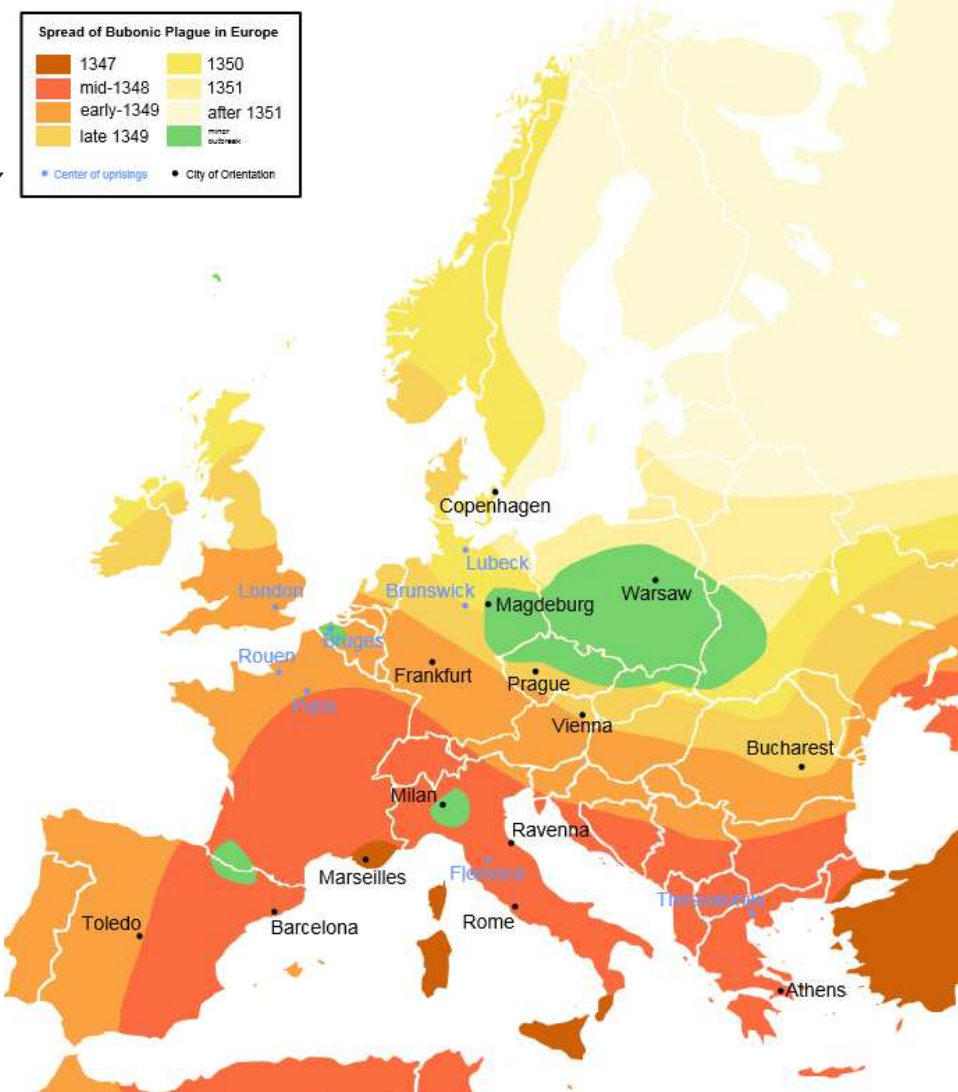
Je považována za základ výzkumné metodologie ve zdravotnictví a pomáhá medicíně založené na důkazech, protože rozpoznává rizikové faktory přenosu nemocí a určuje a hodnotí (optimální) postupy jejich léčby.

Zahrnuje zkoumání vzniku nemoci, výběr vhodné studie, sběr a analýzu dat s ohledem na vývoj statistických modelů, sestavení hypotézy, Souvisí i z dalšími odvětvími - biologie je potřeba k pochopení působení nemocí, společenské vědy jako sociologie a filozofie pomáhají vyhodnotit bezprostřední i méně aktuální rizikové faktory.

Dělí se na *epidemiologii obecnou*, zabývající se metodologií práce a obecnými epidemiologickými zákonitostmi a *speciální epidemiologii* konkrétních nemocí.

MATEMATICKÁ BIOLOGIE

Epidemiologie jako odvětví medicíny studuje faktory ovlivňující zdraví a nemocnost obyvatelstva. Její výsledky slouží jako poklad k zdůvodnění lékařských zásahů v zájmu veřejného zdraví a zdravotní prevence.



MATEMATICKÁ BIOLOGIE

Demografie (δῆμος - lid γράφω - píši, popisuji, měřím) je obor, který se zabývá procesy reprodukce lidských populací.

Objektem studia demografie tedy jsou lidské populace, předmětem jejího studia je proces demografické reprodukce, tedy přirozený proces obnovy obyvatelstva důsledkem rození a vymírání.

Procesy demografické reprodukce jsou *úmrtnost* (též mortalita), *nemocnost*, *porodnost* (též natalita), *potratovost*, *sňatečnost* a *rozvodovost*.



POPULAČNÍ BIOLOGIE

Leonardo z Pisy, Leonardo Pisano, Leonardo Bigollo, Leonardo Bonacci, Fibonacci

(1170? – 1250?)

italský matematik
propagace arabských číslic v Evropě
Fibonacciho posloupnost
1202 – Liber abaci (Kniha o výpočtech)

Příklad:

Muž má v určitém uzavřeném místě pár králíků.
Vypočítejte kolik tam bude za rok z tohoto páru
králíků, pokud předpokládáme, že se za měsíc narodí
další pár a ten se v dalším měsíci bude dál
rozmnožovat stejným způsobem.



$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}; P_0 = 0; P_1 = 1;$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

POPULAČNÍ BIOLOGIE

Leonardo z Pisy, Leonardo Pisano, Leonardo Bigollo, Leonardo Bonacci, Fibonacci

(1170? – 1250?)

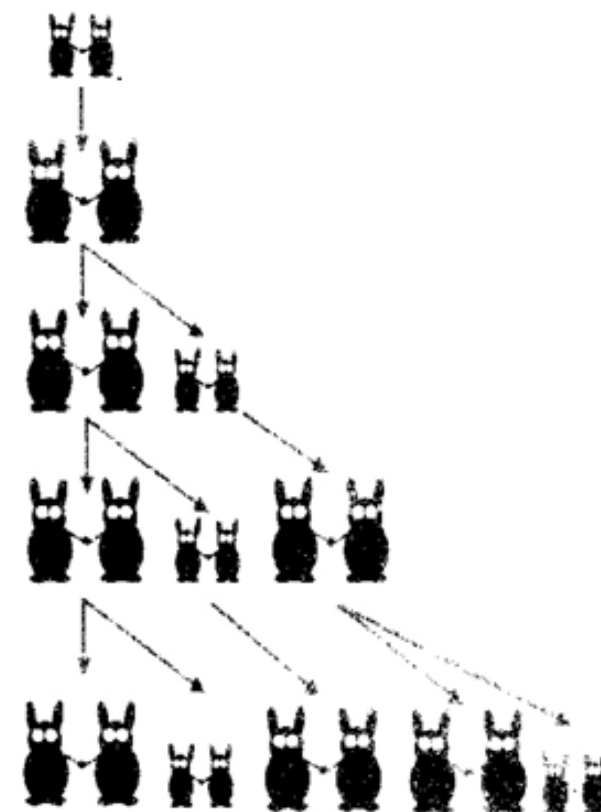
italský matematik
propagace arabských číslic v Evropě
Fibonacciova posloupnost
1202 – Liber abaci (Kniha o výpočtech)

Příklad:

Muž má v určitém uzavřeném místě pár králíků.
Vypočítejte kolik tam bude za rok z tohoto páru
králíků, pokud předpokládáme, že se za měsíc narodí
další pár a ten se v dalším měsíci bude dál
rozmnožovat stejným způsobem.

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}; P_0 = 0; P_1 = 1;$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

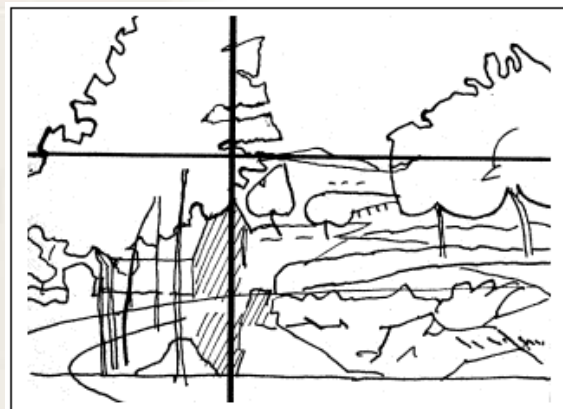
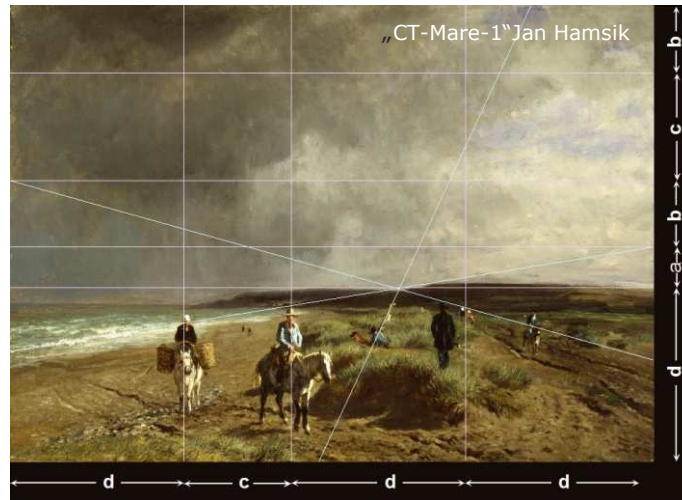


ODBOČKA – ZLATÝ ŘEZ

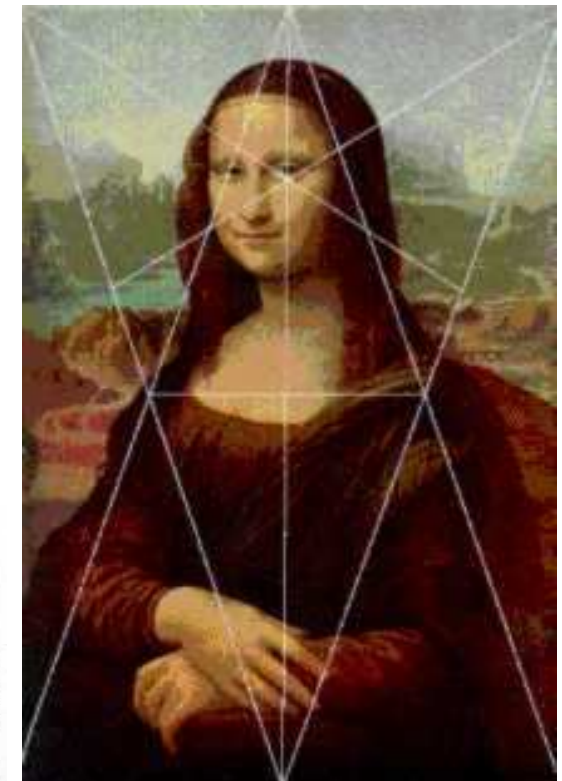
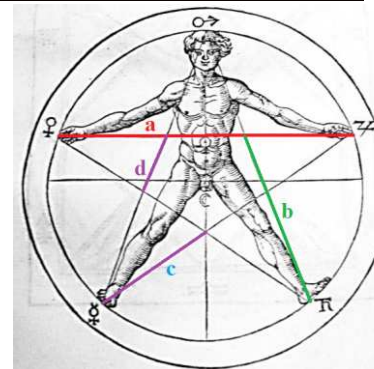


$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$$

$$\frac{a}{b} = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618\ 033\ 988\ 749\ 894\ 848 \dots$$



$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$



ODBOČKA – ZLATÝ ŘEZ



$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$$

$$\frac{a}{b} = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618\ 033\ 988\ 749\ 894\ 848 \dots$$

FIBONACCIOVA POSLOUPNOST

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P _n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

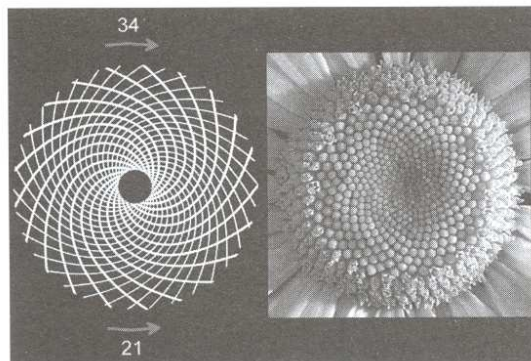
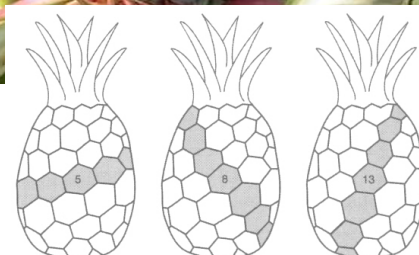
poměr sousedních hodnot posloupnosti:

$$1/1 = 1,000 \quad 2/1 = 2,000 \quad 3/2 = 1,5 \quad 5/3 = 1,667 \quad 8/5 = 1,600$$
$$13/8 = 1,625 \quad 21/13 = 1,615 \quad 34/21 = 1,619 \quad 55/34 = 1,617 \quad \dots$$

ODBOČKA – ZLATÝ ÚHEL



$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{360^\circ}$$



počet korunních lístků	květina
3	iris, lilie
5	pryskyřník, orlíček, stračka, hvozdík, šípek
8	krásnoočko, stračka
13	cinerárie, aksamitník, přímětník
21	astra, čekanka
34	jitrocel, sedmikráska, kopretina
55	sedmikráska, slunečnice
89	sedmikráska, slunečnice
144	slunečnice

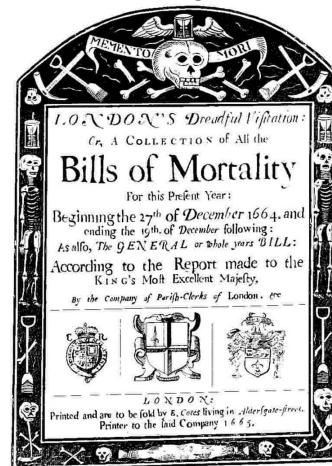
POPULAČNÍ BIOLOGIE



Sir William Petty
(1623–1687)

anglický ekonom, statistik a lékař,
profesor hudby, námořník a vynálezce

údaje o křtech a pohřbech v
londýnské farnosti
od roku 1592



John Graunt
(1620–1674)

londýnský obchodník s galanterií

**Natural and Political
Observations Made Upon
the Bills of Mortality (1662)**

celkem pět vydání až
do roku 1676

London 35	From the 15 of August to the 22.	1665
of A. D. Woodhouse 11	of George Bumbellier 11	of Maria Ludgou 11
of A. D. Woodhouse 12	of George Bumbellier 12	of Maria Ludgou 12
of A. D. Woodhouse 13	of George Bumbellier 13	of Maria Ludgou 13
of A. D. Woodhouse 14	of George Bumbellier 14	of Maria Ludgou 14
of A. D. Woodhouse 15	of George Bumbellier 15	of Maria Ludgou 15
of A. D. Woodhouse 16	of George Bumbellier 16	of Maria Ludgou 16
of A. D. Woodhouse 17	of George Bumbellier 17	of Maria Ludgou 17
of A. D. Woodhouse 18	of George Bumbellier 18	of Maria Ludgou 18
of A. D. Woodhouse 19	of George Bumbellier 19	of Maria Ludgou 19
of A. D. Woodhouse 20	of George Bumbellier 20	of Maria Ludgou 20
of A. D. Woodhouse 21	of George Bumbellier 21	of Maria Ludgou 21
of A. D. Woodhouse 22	of George Bumbellier 22	of Maria Ludgou 22
of A. D. Woodhouse 23	of George Bumbellier 23	of Maria Ludgou 23
of A. D. Woodhouse 24	of George Bumbellier 24	of Maria Ludgou 24
of A. D. Woodhouse 25	of George Bumbellier 25	of Maria Ludgou 25
of A. D. Woodhouse 26	of George Bumbellier 26	of Maria Ludgou 26
of A. D. Woodhouse 27	of George Bumbellier 27	of Maria Ludgou 27
of A. D. Woodhouse 28	of George Bumbellier 28	of Maria Ludgou 28
of A. D. Woodhouse 29	of George Bumbellier 29	of Maria Ludgou 29
of A. D. Woodhouse 30	of George Bumbellier 30	of Maria Ludgou 30
of A. D. Woodhouse 31	of George Bumbellier 31	of Maria Ludgou 31
of A. D. Woodhouse 32	of George Bumbellier 32	of Maria Ludgou 32
of A. D. Woodhouse 33	of George Bumbellier 33	of Maria Ludgou 33
of A. D. Woodhouse 34	of George Bumbellier 34	of Maria Ludgou 34
of A. D. Woodhouse 35	of George Bumbellier 35	of Maria Ludgou 35
of A. D. Woodhouse 36	of George Bumbellier 36	of Maria Ludgou 36
of A. D. Woodhouse 37	of George Bumbellier 37	of Maria Ludgou 37
of A. D. Woodhouse 38	of George Bumbellier 38	of Maria Ludgou 38
of A. D. Woodhouse 39	of George Bumbellier 39	of Maria Ludgou 39
of A. D. Woodhouse 40	of George Bumbellier 40	of Maria Ludgou 40
of A. D. Woodhouse 41	of George Bumbellier 41	of Maria Ludgou 41
of A. D. Woodhouse 42	of George Bumbellier 42	of Maria Ludgou 42
of A. D. Woodhouse 43	of George Bumbellier 43	of Maria Ludgou 43
of A. D. Woodhouse 44	of George Bumbellier 44	of Maria Ludgou 44
of A. D. Woodhouse 45	of George Bumbellier 45	of Maria Ludgou 45
of A. D. Woodhouse 46	of George Bumbellier 46	of Maria Ludgou 46
of A. D. Woodhouse 47	of George Bumbellier 47	of Maria Ludgou 47
of A. D. Woodhouse 48	of George Bumbellier 48	of Maria Ludgou 48
of A. D. Woodhouse 49	of George Bumbellier 49	of Maria Ludgou 49
of A. D. Woodhouse 50	of George Bumbellier 50	of Maria Ludgou 50
of A. D. Woodhouse 51	of George Bumbellier 51	of Maria Ludgou 51
of A. D. Woodhouse 52	of George Bumbellier 52	of Maria Ludgou 52
of A. D. Woodhouse 53	of George Bumbellier 53	of Maria Ludgou 53
of A. D. Woodhouse 54	of George Bumbellier 54	of Maria Ludgou 54
of A. D. Woodhouse 55	of George Bumbellier 55	of Maria Ludgou 55
of A. D. Woodhouse 56	of George Bumbellier 56	of Maria Ludgou 56
of A. D. Woodhouse 57	of George Bumbellier 57	of Maria Ludgou 57
of A. D. Woodhouse 58	of George Bumbellier 58	of Maria Ludgou 58
of A. D. Woodhouse 59	of George Bumbellier 59	of Maria Ludgou 59
of A. D. Woodhouse 60	of George Bumbellier 60	of Maria Ludgou 60
of A. D. Woodhouse 61	of George Bumbellier 61	of Maria Ludgou 61
of A. D. Woodhouse 62	of George Bumbellier 62	of Maria Ludgou 62
of A. D. Woodhouse 63	of George Bumbellier 63	of Maria Ludgou 63
of A. D. Woodhouse 64	of George Bumbellier 64	of Maria Ludgou 64
of A. D. Woodhouse 65	of George Bumbellier 65	of Maria Ludgou 65
of A. D. Woodhouse 66	of George Bumbellier 66	of Maria Ludgou 66
of A. D. Woodhouse 67	of George Bumbellier 67	of Maria Ludgou 67
of A. D. Woodhouse 68	of George Bumbellier 68	of Maria Ludgou 68
of A. D. Woodhouse 69	of George Bumbellier 69	of Maria Ludgou 69
of A. D. Woodhouse 70	of George Bumbellier 70	of Maria Ludgou 70
of A. D. Woodhouse 71	of George Bumbellier 71	of Maria Ludgou 71
of A. D. Woodhouse 72	of George Bumbellier 72	of Maria Ludgou 72
of A. D. Woodhouse 73	of George Bumbellier 73	of Maria Ludgou 73
of A. D. Woodhouse 74	of George Bumbellier 74	of Maria Ludgou 74
of A. D. Woodhouse 75	of George Bumbellier 75	of Maria Ludgou 75
of A. D. Woodhouse 76	of George Bumbellier 76	of Maria Ludgou 76
of A. D. Woodhouse 77	of George Bumbellier 77	of Maria Ludgou 77
of A. D. Woodhouse 78	of George Bumbellier 78	of Maria Ludgou 78
of A. D. Woodhouse 79	of George Bumbellier 79	of Maria Ludgou 79
of A. D. Woodhouse 80	of George Bumbellier 80	of Maria Ludgou 80
of A. D. Woodhouse 81	of George Bumbellier 81	of Maria Ludgou 81
of A. D. Woodhouse 82	of George Bumbellier 82	of Maria Ludgou 82
of A. D. Woodhouse 83	of George Bumbellier 83	of Maria Ludgou 83
of A. D. Woodhouse 84	of George Bumbellier 84	of Maria Ludgou 84
of A. D. Woodhouse 85	of George Bumbellier 85	of Maria Ludgou 85
of A. D. Woodhouse 86	of George Bumbellier 86	of Maria Ludgou 86
of A. D. Woodhouse 87	of George Bumbellier 87	of Maria Ludgou 87
of A. D. Woodhouse 88	of George Bumbellier 88	of Maria Ludgou 88
of A. D. Woodhouse 89	of George Bumbellier 89	of Maria Ludgou 89
of A. D. Woodhouse 90	of George Bumbellier 90	of Maria Ludgou 90
of A. D. Woodhouse 91	of George Bumbellier 91	of Maria Ludgou 91
of A. D. Woodhouse 92	of George Bumbellier 92	of Maria Ludgou 92
of A. D. Woodhouse 93	of George Bumbellier 93	of Maria Ludgou 93
of A. D. Woodhouse 94	of George Bumbellier 94	of Maria Ludgou 94
of A. D. Woodhouse 95	of George Bumbellier 95	of Maria Ludgou 95
of A. D. Woodhouse 96	of George Bumbellier 96	of Maria Ludgou 96
of A. D. Woodhouse 97	of George Bumbellier 97	of Maria Ludgou 97
of A. D. Woodhouse 98	of George Bumbellier 98	of Maria Ludgou 98
of A. D. Woodhouse 99	of George Bumbellier 99	of Maria Ludgou 99
of A. D. Woodhouse 100	of George Bumbellier 100	of Maria Ludgou 100

POPULAČNÍ BIOLOGIE



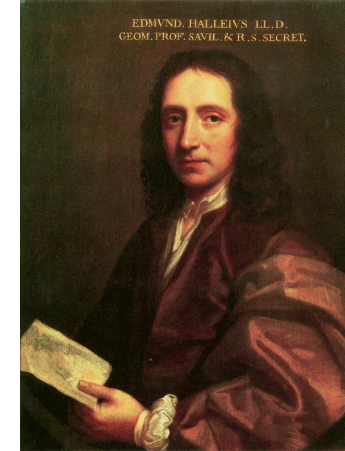
Caspar Neumann
(1648 – 1715)

německý profesor a duchovní

shromáždil data o narození a úmrtí (včetně věku) ve Wroclavi v letech 1687-1691

„Reflexionen über Leben und Tod bey denen in Breslau Geborenen und Gestorbenen“

„**An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, Drawn from Courious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw, with an Attempt to Ascertain the Price of Annuities upon Lives**“ (1693)



Edmond Halley
(1656 – 1742)

anglický astronom, fyzik, geofyzik, matematik, meteorolog a demograf



na konci 17. století zkonstruoval první úmrtnostní tabulky na základě záznamů o úmrtích a porodech a odhadl předpokládané počty lidí v relativně uzavřené, stacionární populaci podle jednotlivých věkových skupin.

POPULAČNÍ BIOLOGIE



Leonhard Euler

(1707-1783)

švýcarský matematik (teorie čísel, algebra, nekonečné řady, elementární funkce, komplexní čísla, teorie grafů, diferenciální a integrální počet včetně rovnic, optimalizace, geometrie,...), fyzik (astronomie, pružnost, tekutiny, pevná tělesa,...), ...

POPULAČNÍ BIOLOGIE

Leonhard Euler

Introductio in analysin infinitorum

(1748)

v kapitole o exponenciálách a logaritmech měl šest příkladů – jeden s hudební aplikací, jeden finanční – splácení úročené půjčky, čtyři z populační dynamiky

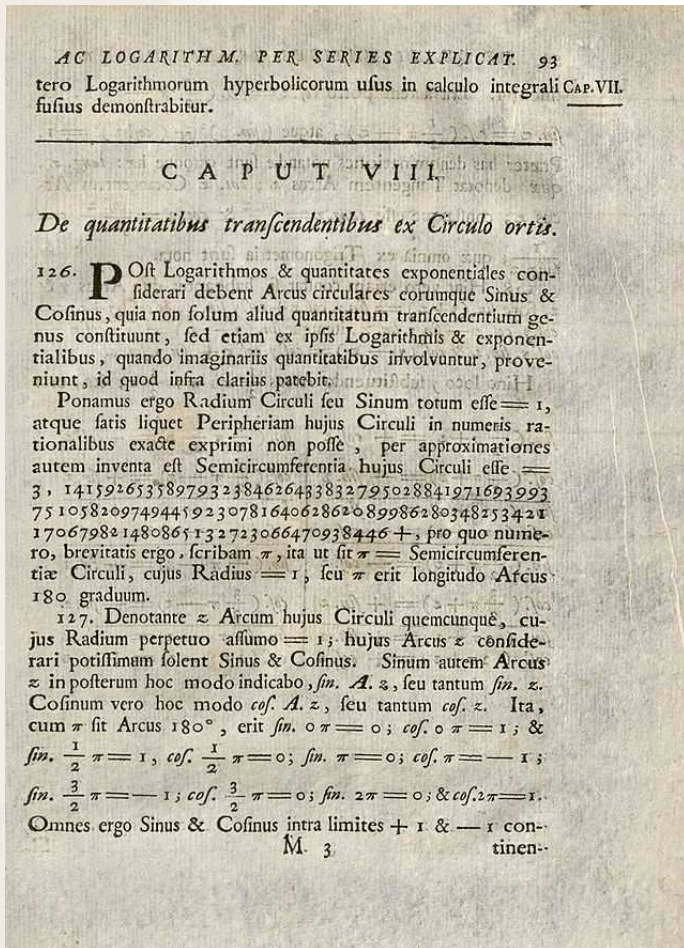
$$P_{n+1} = (1+x) \cdot P_n,$$

kde n je celé číslo a růstový parametr x nabývá reálných kladných hodnot

se zohledněním počáteční podmínky

$$P_n = (1+x)^n \cdot P_0$$

(geometrický, resp. exponenciální růst)



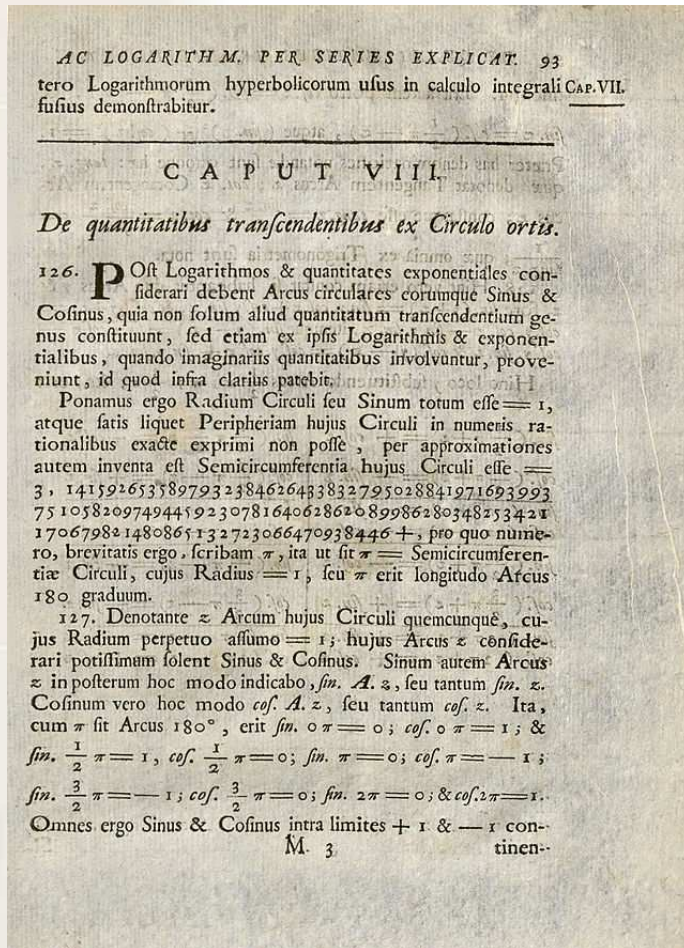
POPULAČNÍ BIOLOGIE

Leonhard Euler

Introductio in analysin infinitorum

(1748)

1. Pokud populace v určitém regionu poroste s rychlostí $1/30$ a v určitém čase tam žije 100 000 obyvatel, jaká bude velikost populace za 100 let? ($\sim 2\,654\,874$ osob)
2. Pokud se velikost populace po biblické Potopě redukovala na 6 osob a pokud předpokládáme, že za 200 let žilo na Zemi milión lidí, jaký byl roční přírůstek? ($1/16 \sim 6,25\%$)
3. Pokud by se každých sto let populace zdvojnásobila, jaký bude roční přírůstek? ($1/144$)
4. Pokud populace ročně poroste s rychlostí $1/100$, za jak dlouho bude desetkrát tak velká?



POPULAČNÍ BIOLOGIE

JEDNODRUHOVÉ POPULACE

Modelování dynamiky jednodruhových populací je založeno na deterministickém způsobu chování populace, přičemž stav populace je charakterizován její velikostí.

Otázky, které mohou jednopopulační modely pomoci řešit jsou např.:

- ☑ jak dlouho potrvá, než populace dosáhne určité velikosti?
- ☑ jak velká bude populace po určitém časovém intervalu, příp. po daném počtu generací?
- ☑ jak dlouho může populace přežít v nevhodných životních podmínkách?

POPULAČNÍ BIOLOGIE

JEDNODRUHOVÁ POPULACE

Nechť $x(t)$ označuje hodnotu populační hustoty v čase t . Potom stav populace v čase $t+\Delta t$ je závislý na hodnotě $x(t)$ v čase t modifikovaný procesy, které se v dané populaci odehrávají.

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta x_b - \Delta x_d + \Delta x_m,$$

kde Δx_b znamená přírůstek za dobu Δt způsobený porodností, Δx_d úbytek způsobený úmrtností a Δx_m představuje změnu vyvolanou migrací. Protože Δx_m představuje jak nárůst, tak úbytek jedinců v populaci, zahrnuje se tento člen v jednodušších variantách modelu ke výrazům vyjadřujícím porodnost a úmrtnost. V takovém případě platí

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta x_b - \Delta x_d.$$

Je-li Δx_b počet jedinců, kteří se narodili za dobu Δt , pak platí

$$\Delta x_b = B(x,t) \cdot \Delta t$$

kde $B(x,t)$ je *porodnost*, tj. počet jedinců, kteří se narodí za časovou jednotku. Podobně

$$\Delta x_d = D(x,t) \cdot \Delta t,$$

kde $D(x,t)$ je *úmrtnost*, tj. počet jedinců, kteří za časovou jednotku zemřou.

POPULAČNÍ BIOLOGIE

JEDNODRUHOVÁ POPULACE

Vztáhneme-li oba výše definované parametry ke stavu populace, získáváme relativní parametry,

tj. *relativní porodnost* $b(x,t) = B(x,t) / x(t)$

a *relativní úmrtnost* $d(x,t) = D(x,t) / x(t)$.

Pak

$$x(t+\Delta t) = x(t) + (b(x,t) - d(x,t)) \cdot x(t) \cdot \Delta t,$$

případně

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \gamma(x,t) \cdot x(t)$$

kde $\gamma(x,t) = b(x,t) - d(x,t)$ je obecná funkce vyjadřující základní dynamické charakteristiky daného populačního modelu.

V limitním případě, kdy $\Delta t \rightarrow 0$, můžeme psát

$$x'(t) = \gamma(x,t) \cdot x(t),$$

což je obecné deterministické vyjádření dynamiky stavu populace $x(t)$ za předpokladu, že tento stav můžeme popsat spojitou funkcí.

POPULAČNÍ BIOLOGIE

JEDNODRUHOVÁ POPULACE

Stav populace $x(t)$ můžeme popsat spojitou funkcí (z biologického hlediska), když:

- ☑ populace $x(t)$ je natolik velká, že není třeba počítat s jednotlivci (*kvantovací podmínka*);
- ☑ generace v populaci $x(t)$ se překrývají, resp. všechny jedinci v populaci jsou identičtí (neexistuje věkové rozlišení), tj. populace je homogenní z hlediska jedinců v produkčním věku (*vzorkovací podmínka*) - zatímco populace bakterií, příp. vyšších živočichů (obratlovců) tuto podmínku zpravidla splňují, u populací hmyzu nebo např. jednoletých rostlin nastávají problémy.

POPULAČNÍ BIOLOGIE



Thomas Robert Malthus

(1766 – 1834)

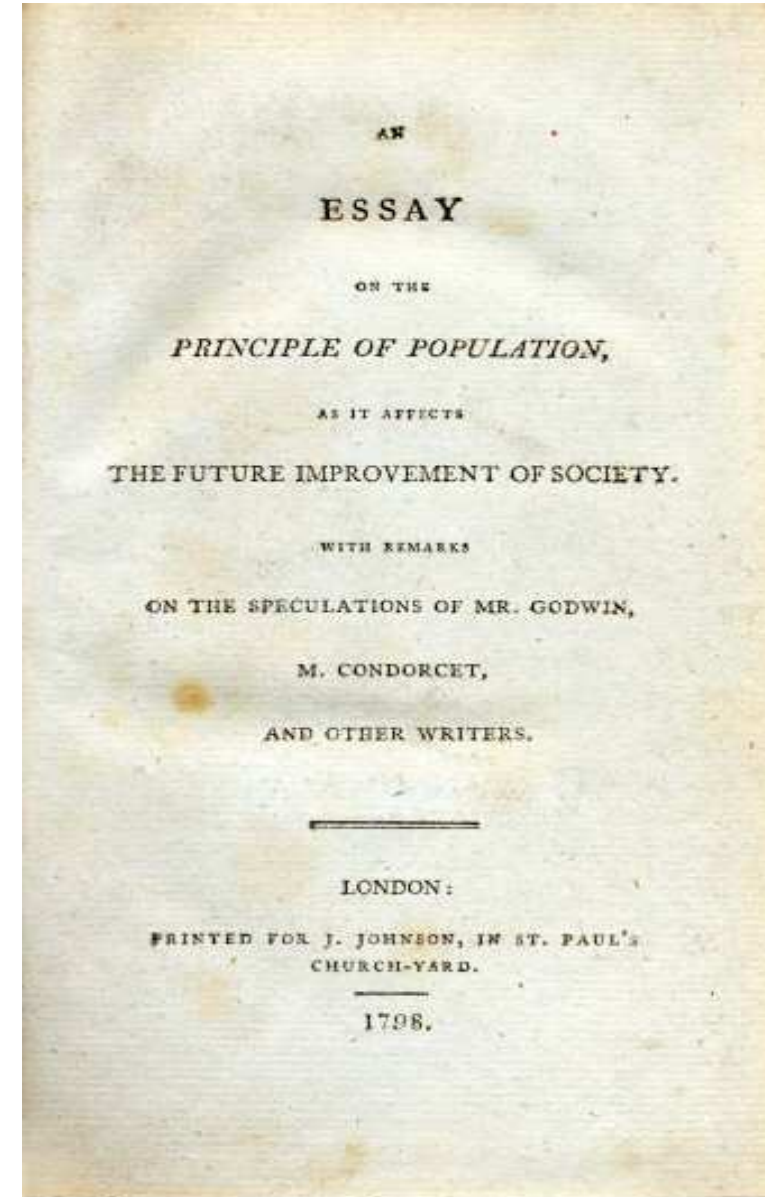
anglický duchovní a ekonom

Malthusova rovnice

$$x'(t) = r \cdot x(t)$$

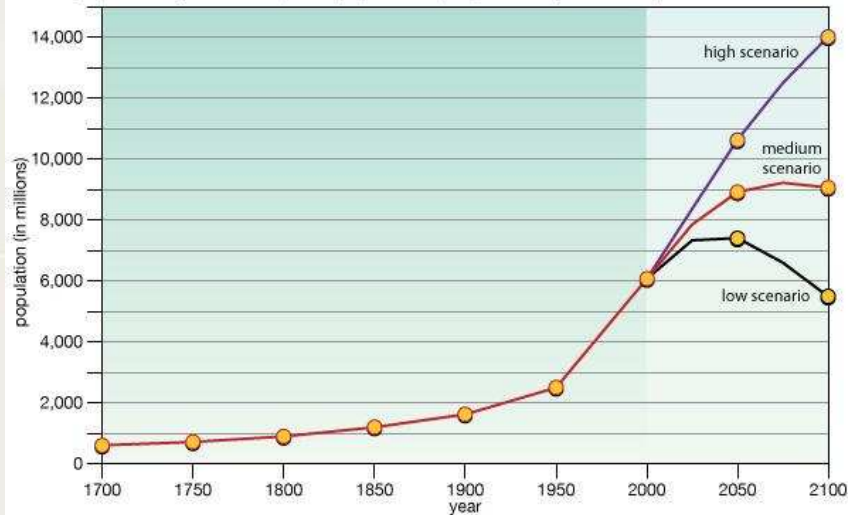
řešení:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{rt}$$



POPULAČNÍ BIOLOGIE

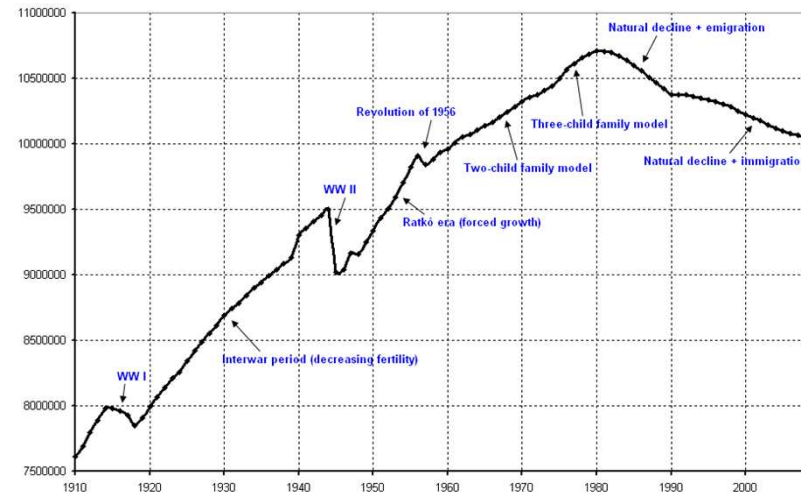
World population (1700–2000) and population projections (2000–2100)



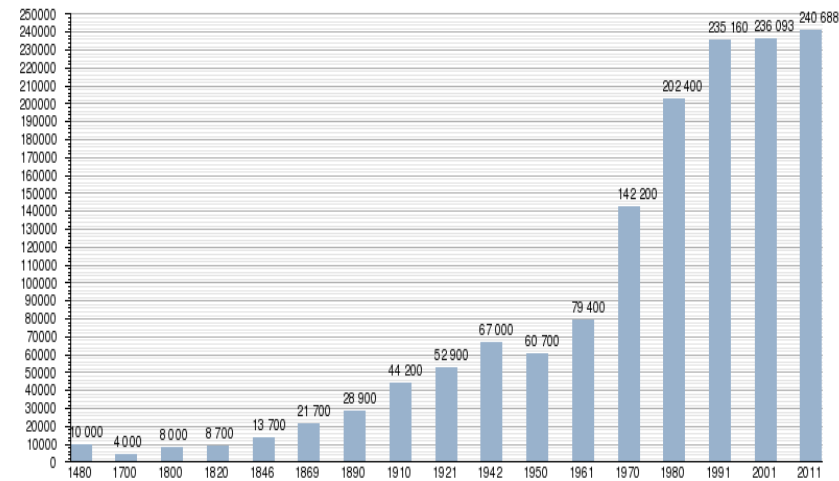
Source: United Nations Department of Economic and Social Affairs/Population Division 2004

© 2012 Encyclopædia Britannica, Inc.

svět

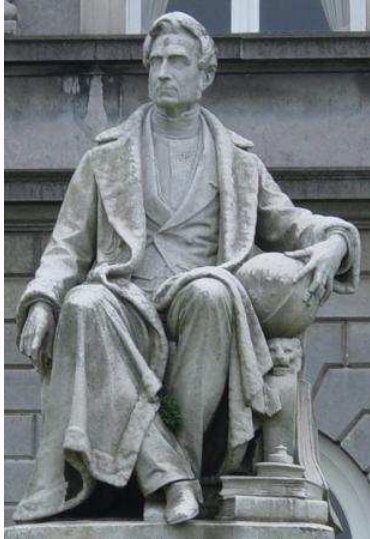


Maďarsko



Košice

POPULAČNÍ BIOLOGIE



Adolphe Quetelet

(1796 – 1874)

belgický meteorolog, astronom,
matematik, statistik, demograf,
sociolog, kriminolog

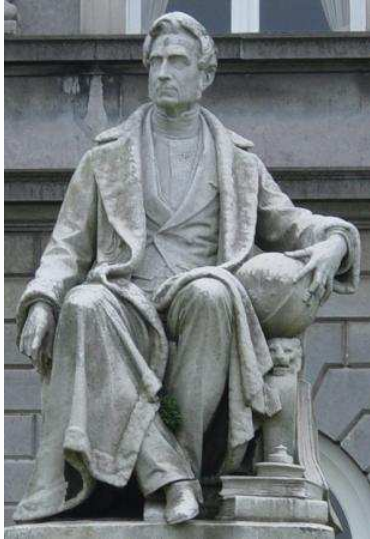
„**Sur l’homme et le développement
de ses facultés**“ (1835)

překážky růstu populace reprezentují
„odpor“, který je úměrný druhé
mocnině rychlosti růstu populace

Body Mass Index (1830 – 1850)

$$\text{BMI} = \frac{m[\text{kg}]}{v^2[\text{m}]}$$

POPULAČNÍ BIOLOGIE



Adolphe Quetelet

(1796 – 1874)

belgický meteorolog, astronom,
matematik, statistik, demograf,
sociolog, kriminolog

„**Sur l'homme et le développement
de ses facultés**“ (1835)

překážky růstu populace reprezentují
„odpor“, který je úměrný druhé
mocnině rychlosti růstu populace



Pierre-Francois Verhulst

(1804 – 1849)

belgický matematik

„**Notice sur la loi que la population poursuit dans
son accroissement**“. *Correspondance
mathématique et physique* 10,(1838):113–121.

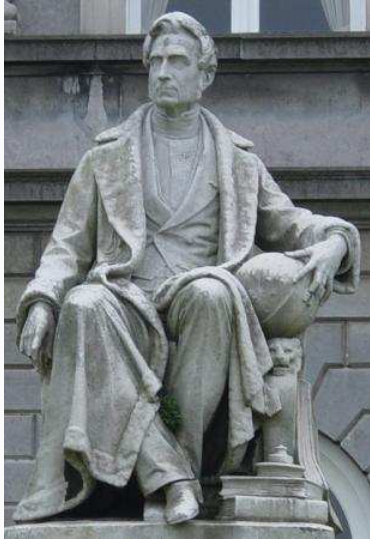
$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

řešení:

$$N(t) = \frac{K}{1 + CKe^{-rt}}$$

kde $C = 1/N_0 - 1/K$

POPULAČNÍ BIOLOGIE



Adolphe Quetelet

(1796 – 1874)

belgický meteorolog, astronom,
matematik, statistik, demograf,
sociolog, kriminolog

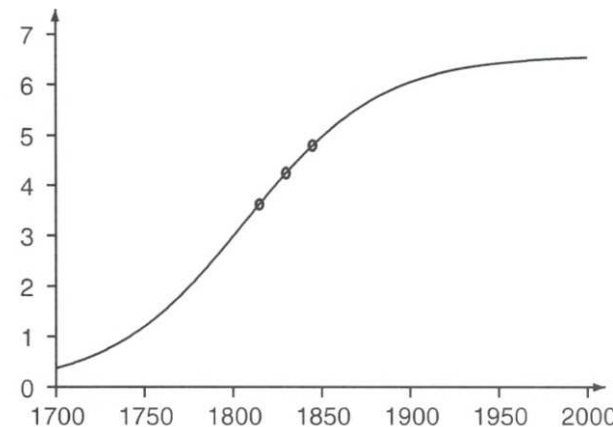
„**Sur l’homme et le développement
de ses facultés**“ (1835)

překážky růstu populace reprezentují
„odpor“, který je úměrný druhé
mocnině rychlosti růstu populace



Pierre-Francois Verhulst

(1804 – 1849)



počet
obyvatel
Belgie
2013:

$11,2 \cdot 10^6$

POPULAČNÍ BIOLOGIE

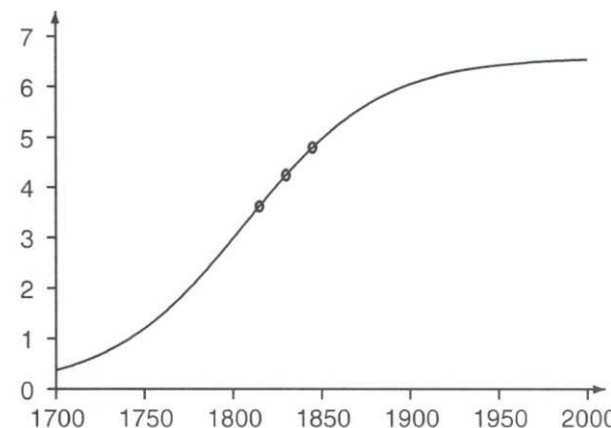


Pierre-Francois Verhulst
(1804 – 1849)

rovnice byla znovu publikována v roce 1920 Raymondem Pearlem and Lowellem Reedem



Pearlova – Verhulstova rovnice 😊
logistická rovnice



počet
obyvatel
Belgie
2013:

$11,2 \cdot 10^6$

POPULAČNÍ BIOLOGIE

INTERAKCE DVOU POPULACÍ

mutualismus	+	+	obě populace mají ze společného soužití prospěch (symbióza)
dravec-kořist	+	-	jedna populace prospívá, druhá chřadne (parazit x hostitel, býložravec x rostlina, zaměstnavatel x zaměstnanec, aj.)
konkurence	-	-	obě populace vzájemným kontaktem trpí
komensalismus	+	0	jeden druh se živí zbytky potravy druhého, neškodné příživnictví
amensalismus	-	0	
neutralismus	0	0	oba zúčastněné druhy se nepodílí na vzájemné látkové výměně

POPULAČNÍ BIOLOGIE

MODEL DRAVEC – KOŘIST
MODEL LOTKY – VOLTERRY

POPULAČNÍ BIOLOGIE

MODEL DRAVEC – KOŘIST

MODEL LOTKY – VOLTERRY



Alfred James Lotka

(1880 – 1949)

americký matematik, statistik,
fyzikální chemik
snažil se uplatnit fyzikální
přístupy a modely v živých
vědách



Vito Volterra

(1860 – 1940)

italský matematik a fyzik
"Signor Scienza Italiana"

POPULAČNÍ BIOLOGIE

MODEL LOTKY – VOLTERRY

Předpokládejme, že Δx_n je počet kořistí, které se narodily v časovém intervalu $\langle t, \Delta t \rangle$. Dále předpokládejme, že tato hodnota je úměrná počtu kořistí $x(t)$ v čase t , délce časového intervalu Δt a relativní porodnosti k_1 kořistí. To znamená, že přírůstek do populace kořisti bude respektovat Malthusův model populační dynamiky

$$\Delta x_n = k_1 \cdot x(t) \cdot \Delta t.$$

Dále, necht' počet kořistí Δx_m ulovených $y(t)$ dravci během časového intervalu $\langle t, \Delta t \rangle$ je úměrný počtu vzájemných setkání jedinců obou druhů a délce časového intervalu Δt

$$\Delta x_m = k_2 \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot \Delta t ,$$

kde konstanta k_2 vyjadřuje pravděpodobnost, že setkání dravce s kořistí skončí zahubením kořisti. Tato konstanta může také vyjádřit spotřebu či potřebu dravců.

Celkovou změnu stavu populace kořistí za dobu Δt lze tedy určit rozdílem

$$\Delta x_n - \Delta x_m = k_1 \cdot x(t) \cdot \Delta t - k_2 \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot \Delta t = [k_1 \cdot x(t) - k_2 \cdot x(t) \cdot y(t)] \cdot \Delta t.$$

POPULAČNÍ BIOLOGIE

MODEL LOTKY – VOLTERRY

Nyní předpokládejme, že počet narozených dravců Δy_n během doby Δt je úměrný počtu vzájemných setkání dravců a kořistí a délce časového intervalu Δt

$$\Delta y_n = k_2 \cdot k_3 \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot \Delta t,$$

kde k_3 je konstanta vyjadřující účinnost přeměny biomasy kořisti na biomasu dravce.

Konečně, necht' úbytek v populaci dravců Δy_m je opět dán Malthusovým modelem populační dynamiky, tj. je úměrný stavu populace dravců $y(t)$ v čase t a délce časového intervalu Δt

$$\Delta y_m = k_4 \cdot y(t) \cdot \Delta t,$$

kde konstanta úměrnosti k_4 reprezentuje relativní úmrtnost dravců.

Za těchto předpokladů, je celková změna v populaci dravců dána vztahem

$$\Delta y_n - \Delta y_m = [k_2 \cdot k_3 \cdot x(t) \cdot y(t) - k_4 \cdot y(t)] \cdot \Delta t.,$$

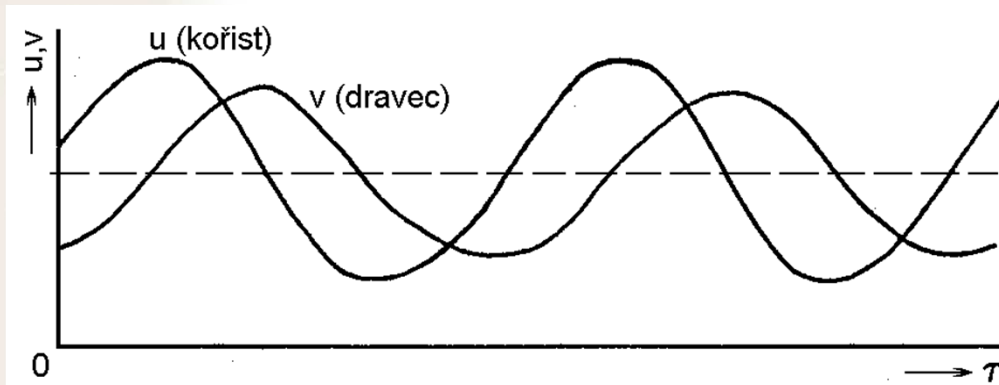
a v limitním případě pro $\Delta t \rightarrow 0$ můžeme psát soustavu

$$x'(t) = k_1 \cdot x(t) - k_2 \cdot x(t) \cdot y(t)$$

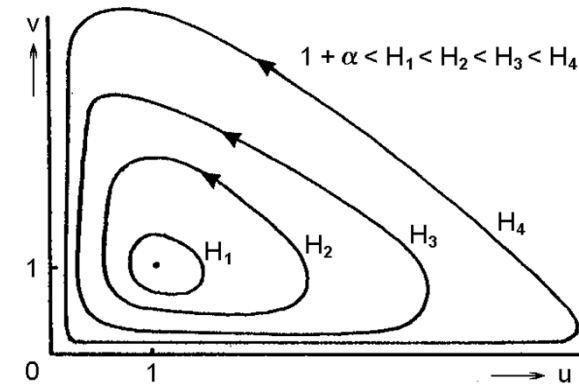
$$y'(t) = k_2 \cdot k_3 \cdot x(t) \cdot y(t) - k_4 \cdot y(t)$$

POPULAČNÍ BIOLOGIE

MODEL LOTKY – VOLTERRY



*Typické časové průběhy
normalizovaných veličin modelu
Lotky - Volterra*



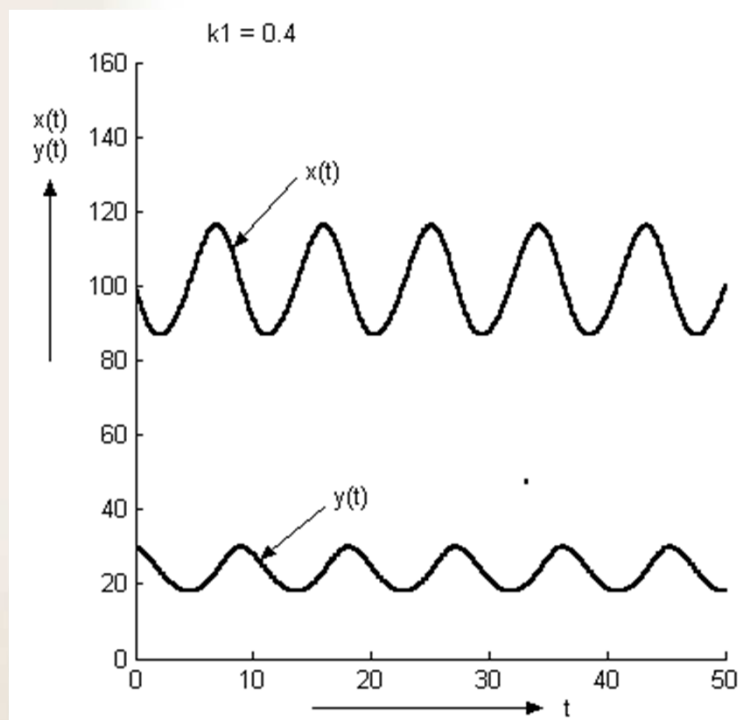
*Stavové trajektorie
normalizovaného modelu
Lotky - Volterra*

POPULAČNÍ BIOLOGIE

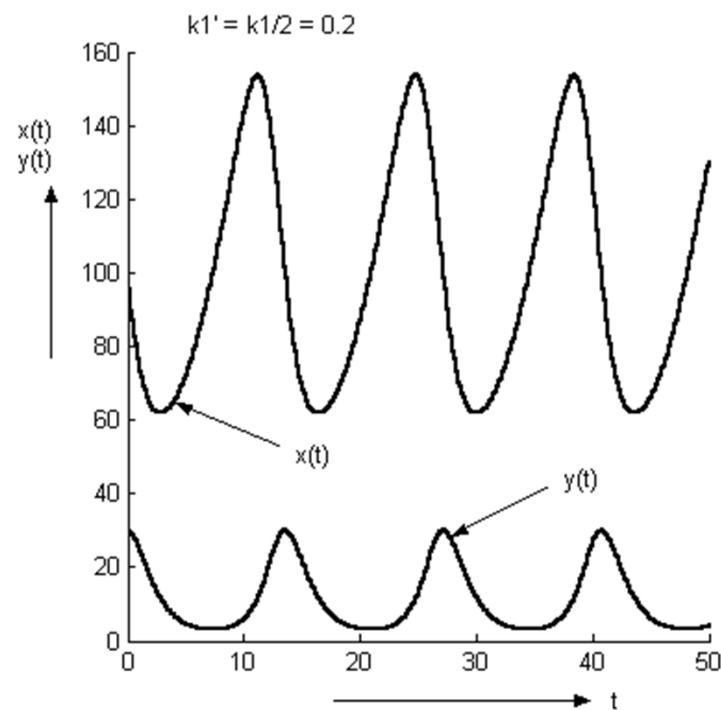
MODEL LOTKY – VOLTERRY

PŘÍKLADY ZE ŽIVOTA

vliv omezení porodnosti kořisti na celkový stav populace dravec x kořist



výsledky simulace s původními hodnotami parametrů



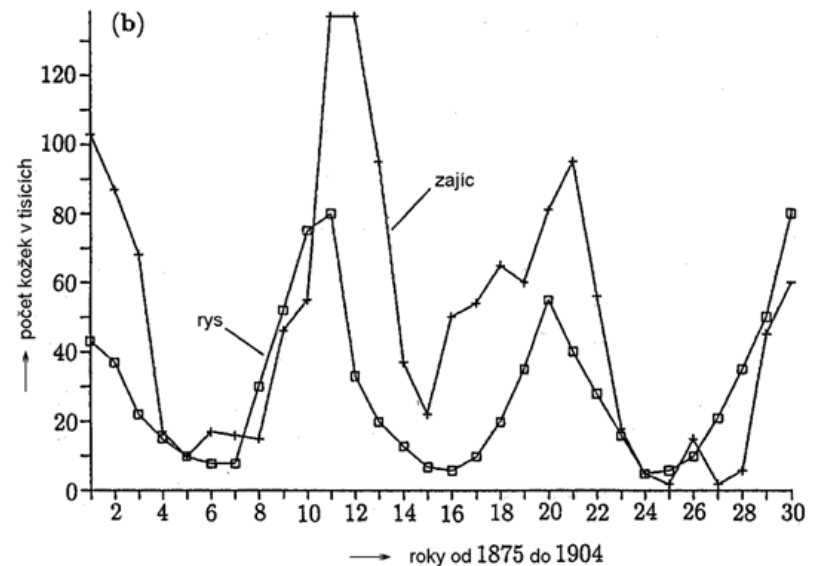
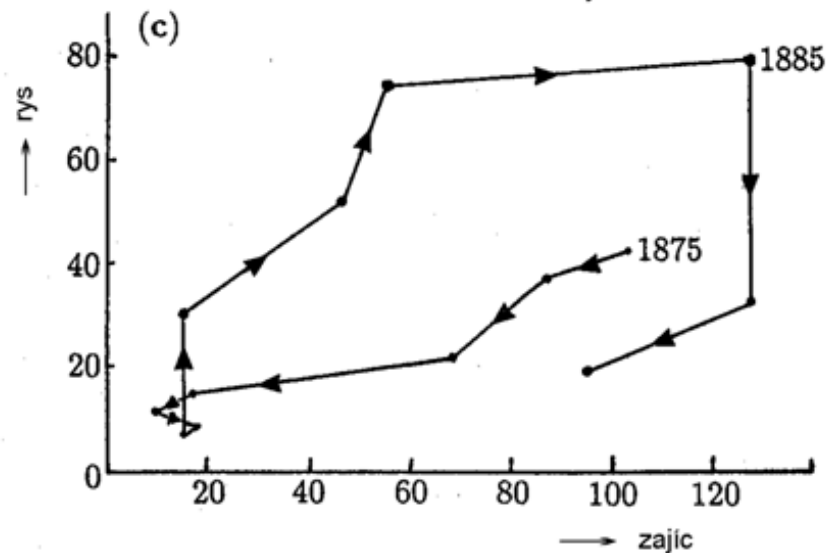
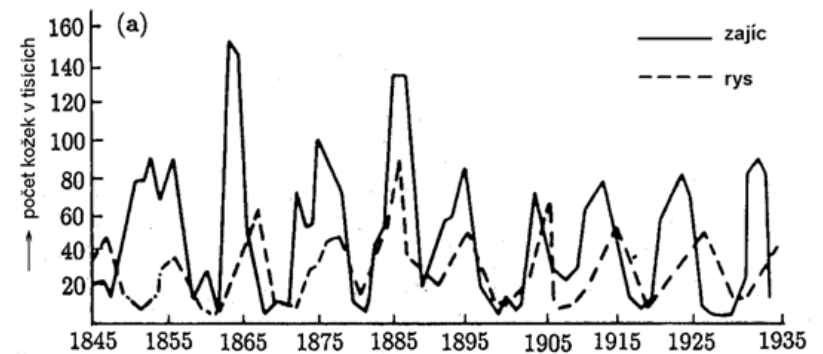
výsledky simulace s poloviční hodnotou parametru k_1 oproti hodnotě původní

POPULAČNÍ BIOLOGIE

MODEL LOTKY – VOLTERRY

PŘÍKLADY ZE ŽIVOTA

výklad dynamiky populace rysů
a zajíců v Hudson Bay v letech
1845 - 1930



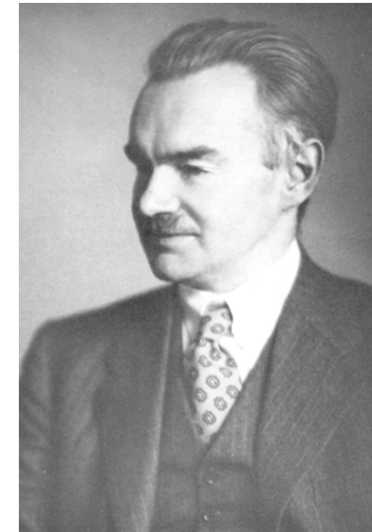
EPIDEMIOLOGIE

MATEMATICKÉ MODELY ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB KERMACKŮV – MCKENDRICKŮV MODEL (1927)



Anderson Gray McKendrick
(1876 – 1943)

skotský lékař, fyziolog a
epidemiolog
jeden z prvních, kteří zaváděli
matematické metody do
epidemiologie

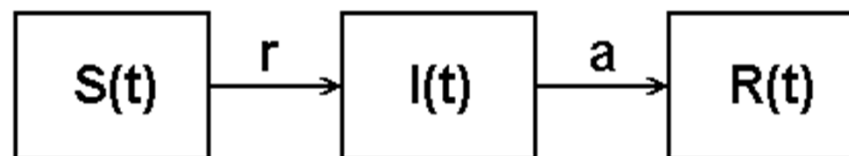


William Ogilvy Kermack
(1898 – 1970)

skotský matematik a statistik

EPIDEMIOLOGIE

MATEMATICKÉ MODELY ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB KERMACKŮV – McKENDRICKŮV MODEL (1927)

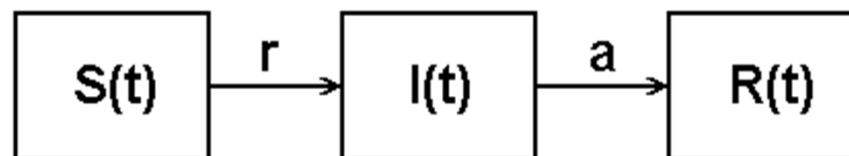


- ❖ nárůst infikovaných jedinců je úměrný počtu ohrožených a infikovaných jedinců, tj. $\sim r.S(t).I(t)$, kde $r > 0$ je konstantou úměrnosti. Ohrožených osob stejnou rychlostí ubývá.
- ❖ rychlost s jakou ubývá infikovaných jedinců (vyléčením, úmrtím) je úměrná počtu infikovaných osob, tj. $\sim a.I(t)$.
- ❖ inkubační doba je zanedbatelná;
- ❖ populace je natolik velká, že vyvolané změny lze považovat za spojité.

$$\begin{aligned} S'(t) &= -r.S(t).I(t), & S(0) &= S_0 > 0 ; \\ I'(t) &= r.S(t).I(t) - a.I(t), & I(0) &= I_0 > 0 ; \\ R'(t) &= a.I(t), & R(0) &= R_0 = 0, \end{aligned}$$

EPIDEMIOLOGIE

MATEMATICKÉ MODELY ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB KERMACKŮV – McKENDRICKŮV MODEL (1927)



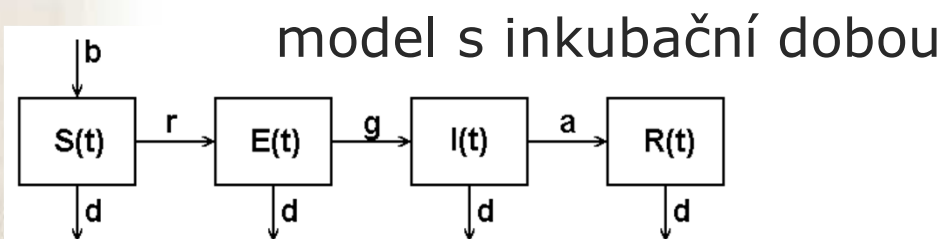
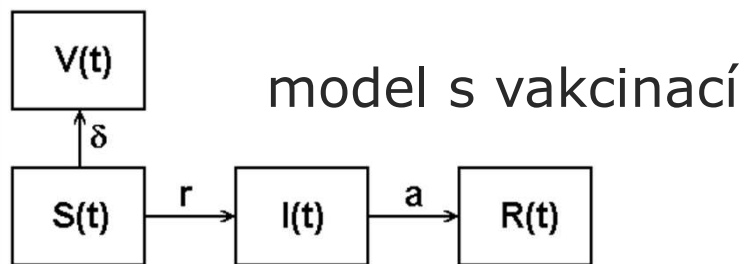
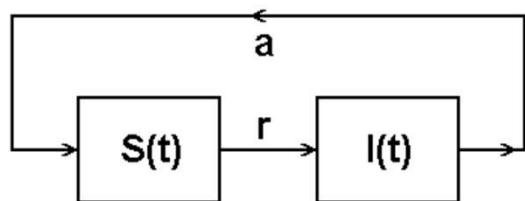
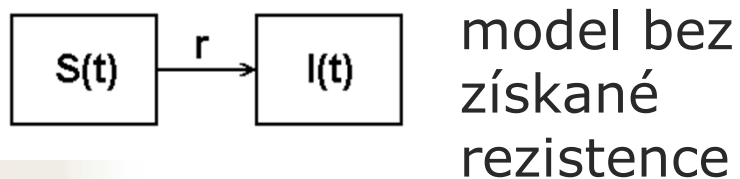
základní otázkou jakékoliv epidemiologické situace je, zda se bude pro dané parametry modelu (společnosti) a počáteční výchozí podmínky nákaza šířit a jak;

- ❖ jak vážná bude epidemie, tj. jaké maximální hodnoty nabude stav skupiny infikovaných;
- ❖ jak se bude vyvíjet stav kategorie R, zejména, je-li choroba smrtelná, apod.

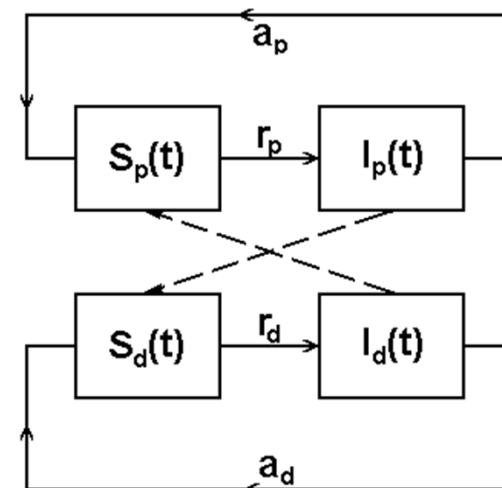
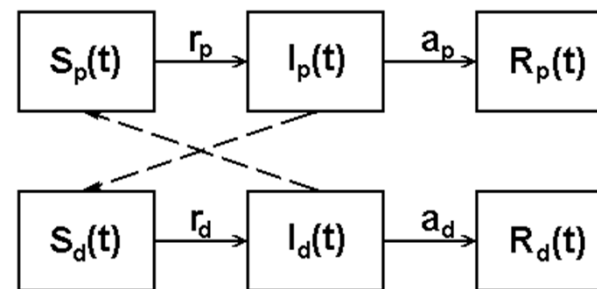
$$\begin{aligned} S'(t) &= -r.S(t).I(t), & S(0) &= S_0 > 0 ; \\ I'(t) &= r.S(t).I(t) - a.I(t), & I(0) &= I_0 > 0 ; \\ R'(t) &= a.I(t), & R(0) &= R_0 = 0, \end{aligned}$$

EPIDEMIOLOGIE

MATEMATICKÉ MODELY ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB DALŠÍ VARIANTY



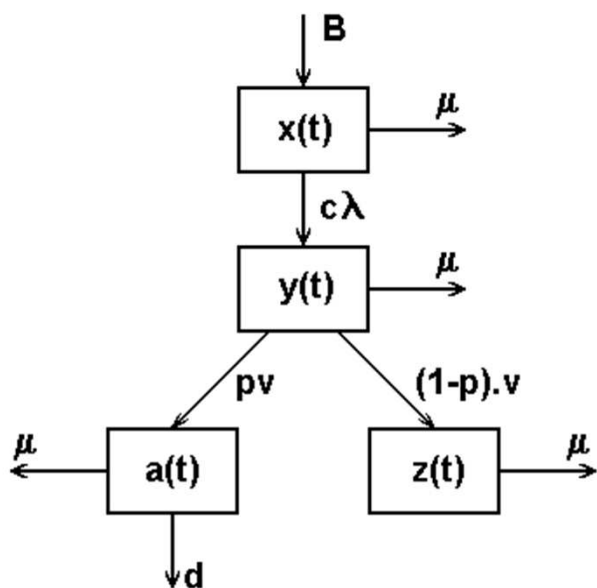
modely venerických chorob



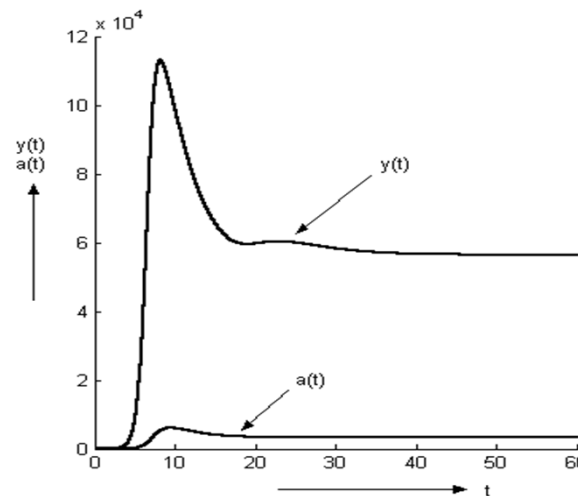
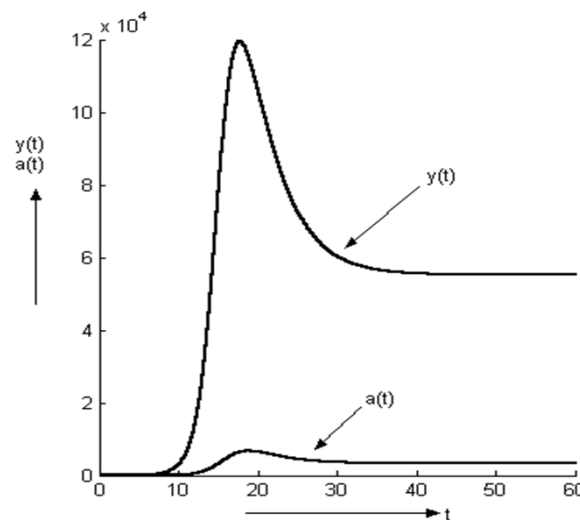
EPIDEMIOLOGIE

MATEMATICKÉ MODELY ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB DALŠÍ VARIANTY

MODEL AIDS



$x(t)$, $y(t)$, $a(t)$ a $z(t)$ udávají počet zdravých, infikovaných, nemocných AIDS a séropozitivních, ale neinfekčních osob



dvojnásobný počet sexuálních partnerů

ZA DVA TÝDNY NA SHLEDANOU

(V TOMTO SEMESTRU NAPOSLED)