ČASOVÉ ŘADY
(SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY)

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

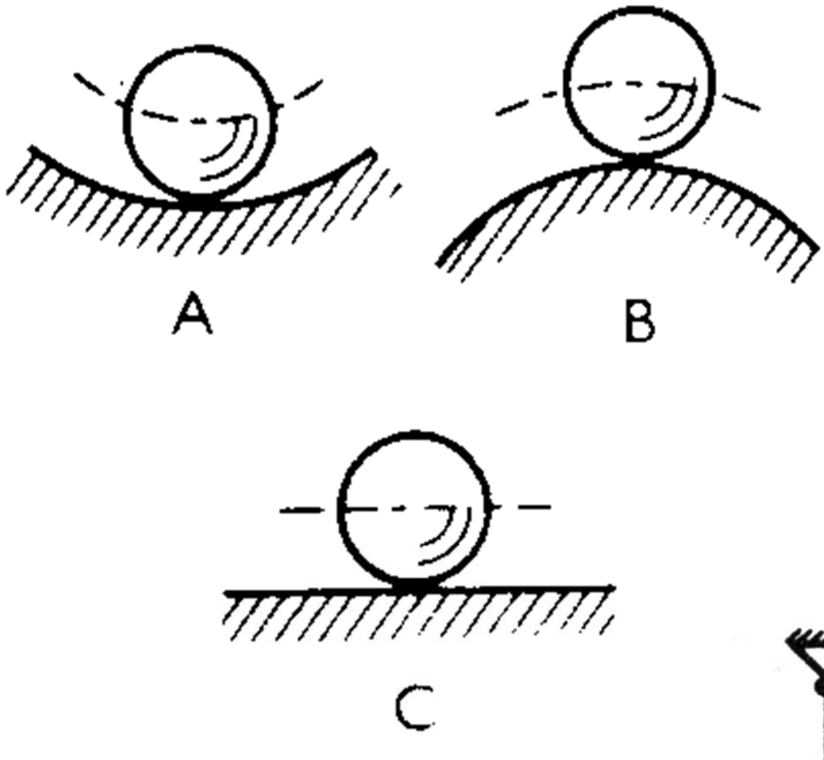
holcik@iba.muni.cz, UKB A29, přízemí, dv.č.112

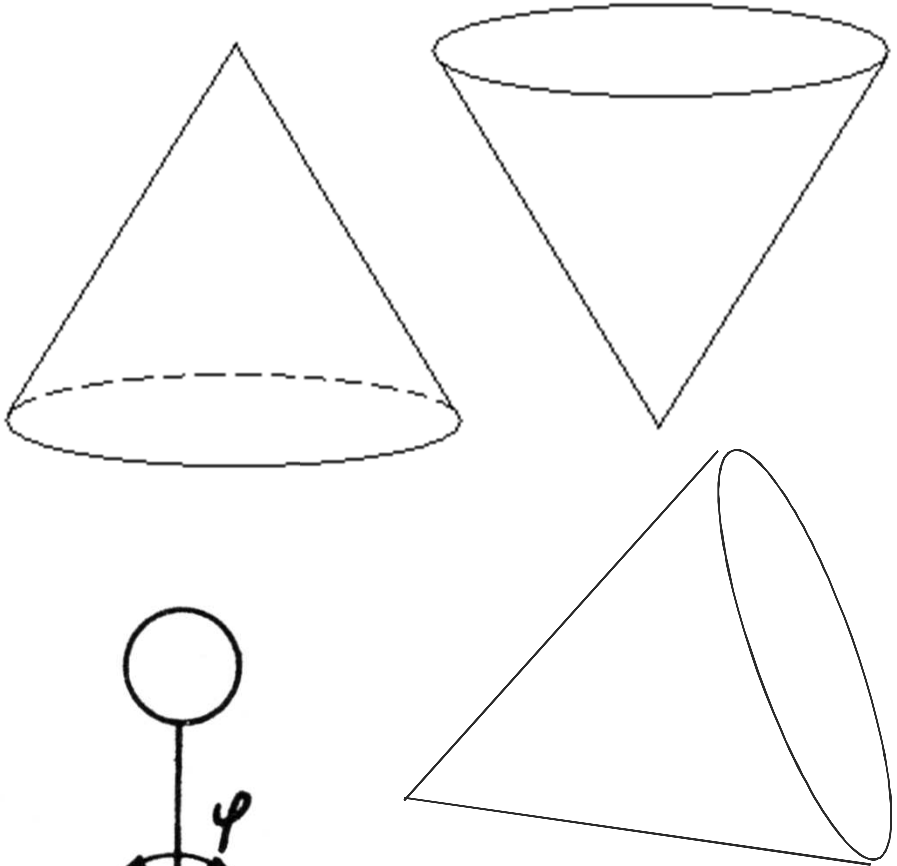
XII. STABILITA

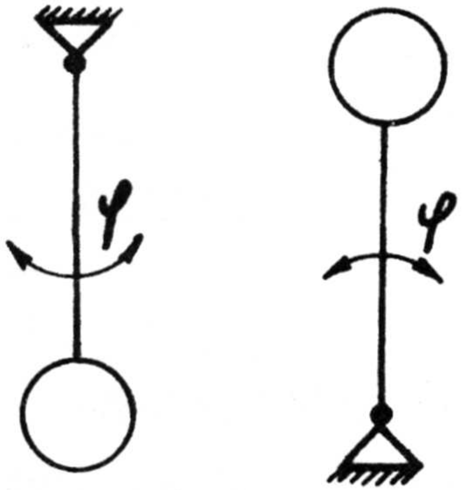
KDY JE A KDY NENÍ SYSTÉM STABILNÍ

- **Stabilita** - vlastnost systému, kterou můžeme charakterizovat jeho schopností udržet své chování či rysy (parametry) v předepsaných mezích i za případného vnějšího rušivého působení.
- **Rovnováha** - relativně stálý stav systému, vzniklý vyrovnáním vlivů na systém působících.

KDY JE A KDY NENÍ SYSTÉM STABILNÍ







STABILITA

- ☑ **Ljapunovská stabilita**: Rovnovážný stav x_e je ljapunovsky stabilní právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolný počáteční stav x_0, který leží v okolí δ rovnovážného stavu, tj.

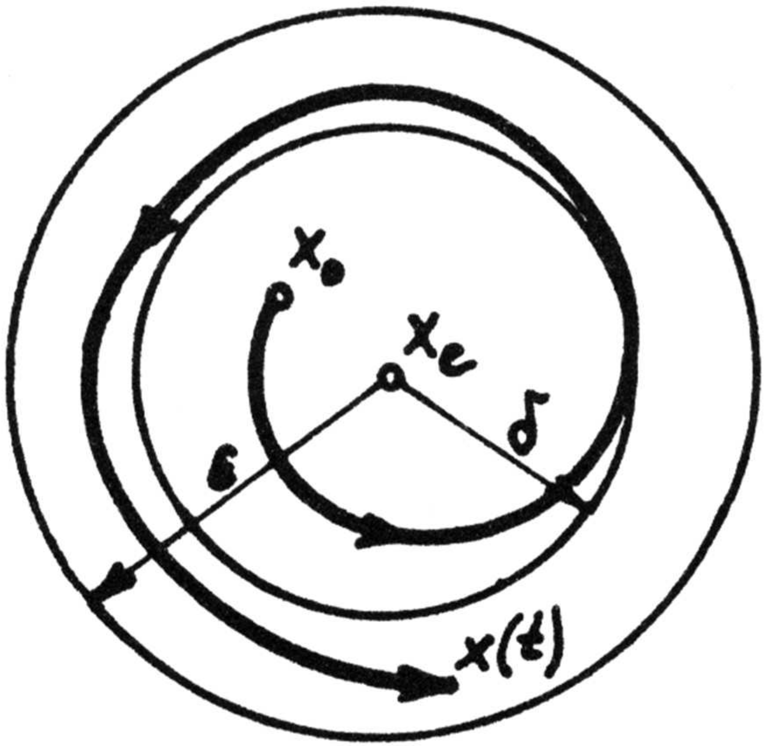
$$\left\| x_0 - x_e \right\| < \delta$$

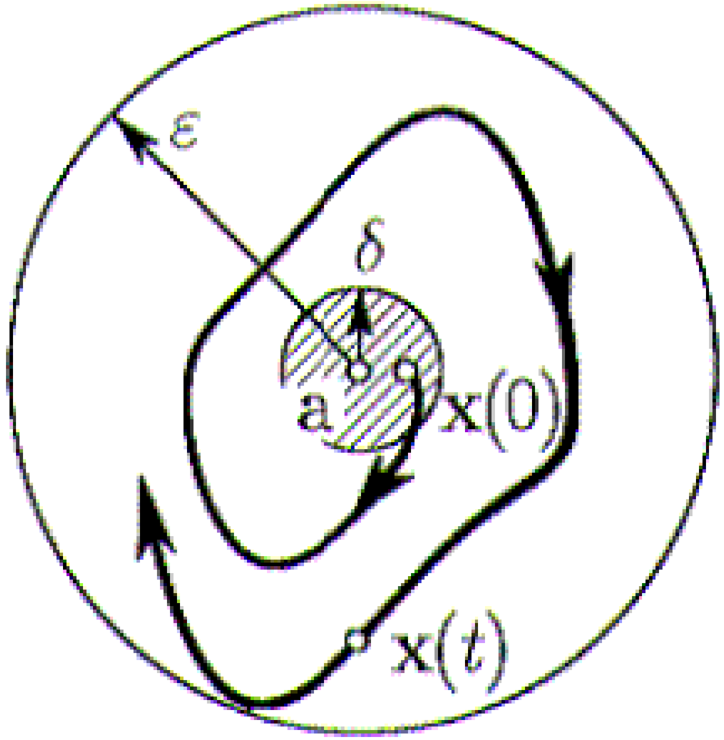
platí, že všechny stavy x(t), které jsou řešením systému, leží v blízkosti rovnovážného stavu, tj.

$$\left\| x(t) - x_e \right\| < \varepsilon$$

STABILITA

- ☑ Ljapunovská stabilita





STABILITA

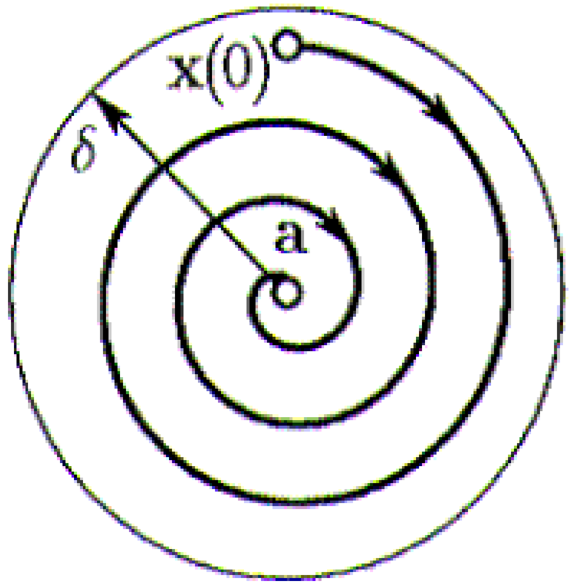
- ☑ Ljapunovská stabilita
  - Nevyžadujeme, aby blízké řešení konvergovalo do rovnovážného stavu, ale pouze vyžadujeme, aby se mu příliš nevzdalovalo.

- ☑ Kvaziasymptotická stabilita:
- ☑ Rovnovážný stav x_e je kvaziasymptoticky stabilní právě tehdy, když existuje takové číslo $\delta > 0$, že každý stav $x(t)$ systému, který leží v δ okolí rovnovážného stavu, konverguje pro $t \to \infty$ k tomuto rovnovážnému stavu, neboli $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_e$.

STABILITA

- Asymptotická stabilita:

  Rovnovážný stav je asymptoticky stabilní právě tehdy, když je ljapunovsky stabilní i kvaziasymptoticky stabilní.



STABILITA

- ☑ Stabilitu můžeme definovat i z „vnějšího pohledu" a to tak, že na každý omezený vstup (co do hodnot) bude systém reagovat omezeným výstupem (co do hodnot) (BIBO - Bounded Input – Bounded Output, ohraničený vstup – ohraničený výstup) .
- ☑ Podle této definice lze ověřit pouze nestabilitu.
- ☑ Nutnou a postačující podmínkou pro BIBO stabilitu je absolutní integrovatelnost jeho impulsní charakteristiky, tj. musí platit

$$\int_0^\infty |h(t)|\, dt < \infty$$

- Pro diskrétní systémy platí obdobná tvrzení.

KDY JE A KDY NENÍ SYSTÉM STABILNÍ

dva základní přístupy k určení stability:

- ☑ stabilita vůči počátečnímu stavu (daná konvergencí přirozené odezvy);
- ☑ stabilita vynuceného pohybu;

STABILITA VYNUCENÉHO POHYBU

- ☑ tendence systému reagovat přiměřeně na podnět konečné délky a po jeho zániku se vrátit do výchozího stavu (není nezbytnou podmínkou

DEFINICE:

Systém je stabilní, pokud na každý ohraničený vstup $x(t)$ $[x(nT_{vz})]$ (co do hodnot i trvání) reaguje rovněž ohraničeným výstupem $y(t)$ $[y(nT_{vz})]$

(dle této definice lze ověřit pouze nestabilitu)

STABILITA VYNUCENÉHO POHYBU

- asymptoticky stabilní systém je systém, jehož přirozená odezva časem zaniká

mějme **lineární** systém pracující ve spojitém čase 2. řádu definovaný přenosovou funkcí

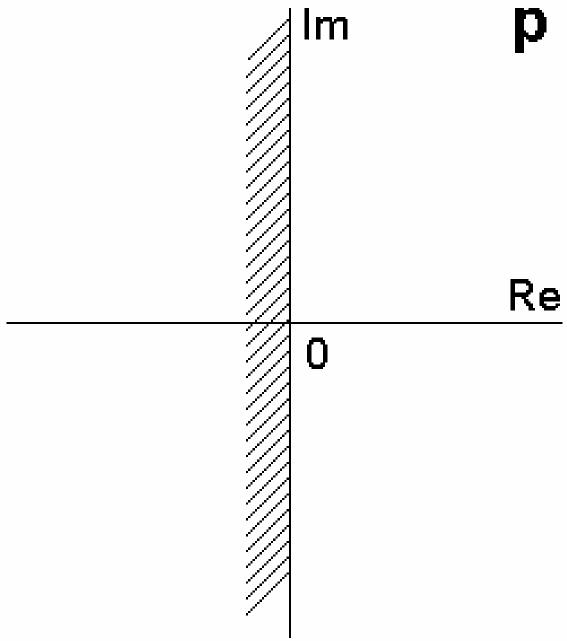
$$H(p) = \frac{K}{p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{K}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{A}{(p - p_1)} + \frac{B}{(p - p_2)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{p - p_1}\right) \approx A.e^{p_1 t}$$

$$h(t) = A.e^{p_1 t} + B.e^{p_2 t}$$

NUTNÉ A POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKY

- Oblast, ve které leží póly stabilního systému, je v komplexní rovině levá polorovina bez imaginární osy.
- Jsou-li póly systému na imaginární ose, říkáme, že je **systém na mezi stability**.



NUTNÉ A POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKY

- *Příklad*: Mějme minimální realizaci systému s přenosovou funkcí

$$G(p) = \frac{p^2 + 2p + 3}{(p+1)^2(2p+3)(0{,}1p+1)(p^2+2p+2)}$$

NUTNÉ A POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKY

- ☑ *Příklad*: Mějme minimální realizaci systému s přenosovou funkcí

$$G(p) = \frac{p^2 + 2p + 3}{(p+1)^2(2p+3)(0{,}1p+1)(p^2+2p+2)}$$

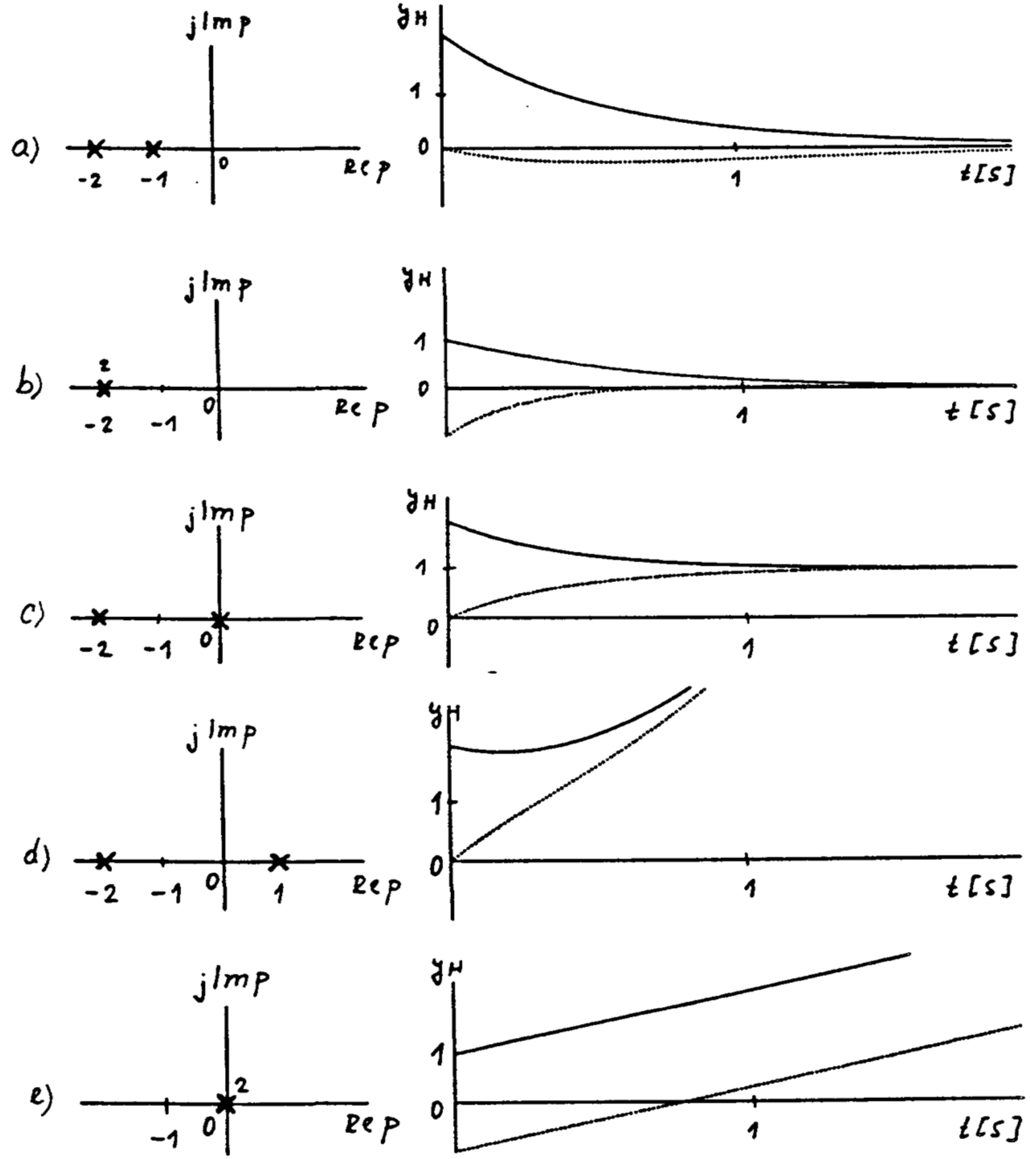
Póly přenosové funkce jsou:

$$p_{1,2} = -1 \qquad p_3 = -\frac{3}{2} \qquad p_4 = -\frac{1}{0{,}1}$$

$$p_5 = -1 - j \quad p_6 = -1 + j$$

Tento systém je ljapunovsky i asymptoticky stabilní

STABILITA VŮČI POČÁTEČNÍMU STAVU



Přirozená odezva systému 2. řádu pro různá rozložení reálných pólů a různé integrační konstanty C_1 a C_2. Plná čára: $C_1 = C_2 = 1$. Tečkovaná čára: $C_1 = -1$, $C_2 = 1$.

a) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ $\quad y_H(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$

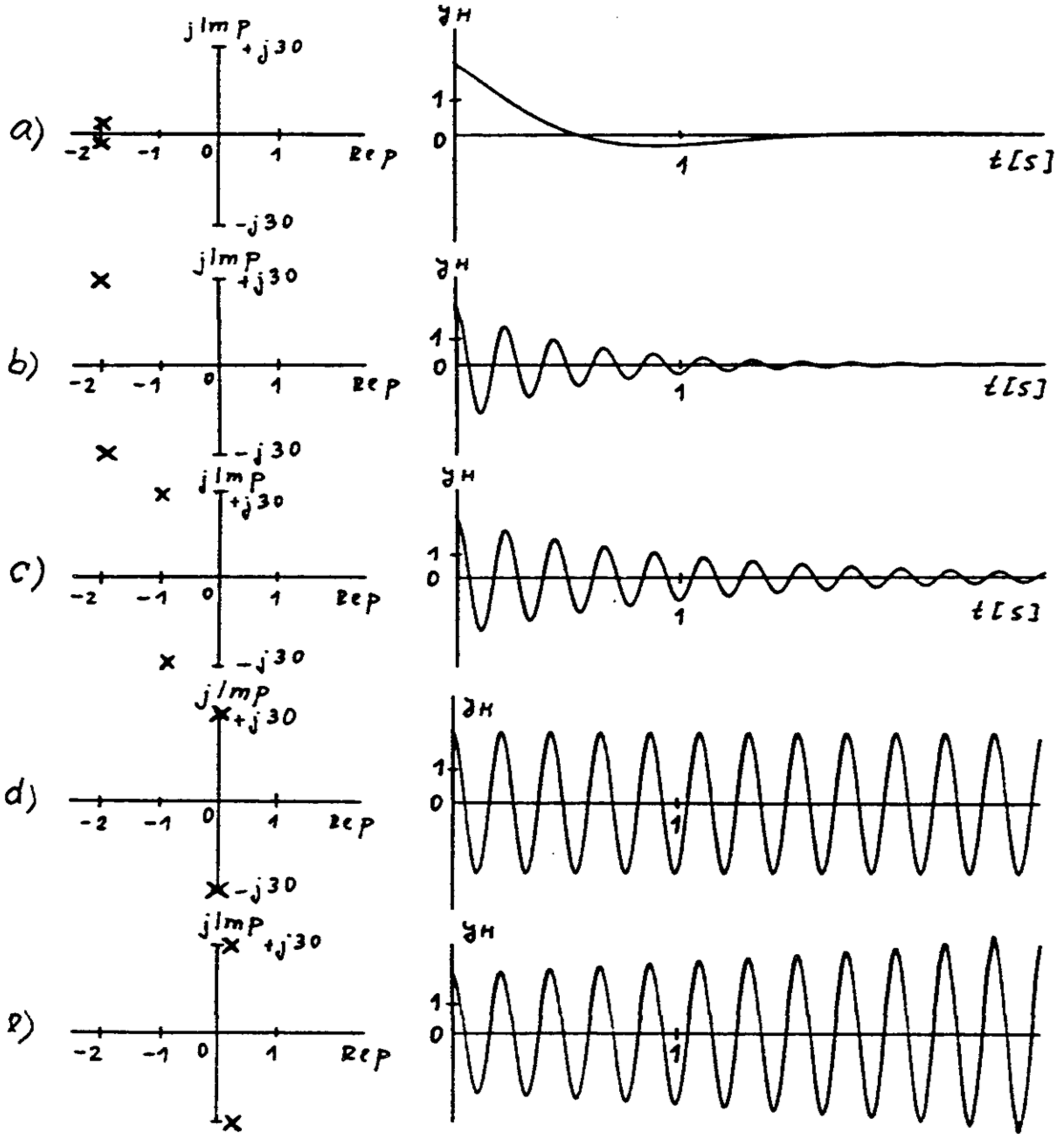
b) $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ $\quad y_H(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$

c) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0$ $\quad y_H(t) = C_1 e^{-2t} + C_2$

d) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$ $\quad y_H(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}$

e) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\quad y_H(t) = C_1 + C_2 t$

STABILITA VŮČI POČÁTEČNÍMU STAVU



Přirozená odezva systému 2. řádu pro různá rozložení komplexních pólů a integrační konstanty $C_1 = C_2 = 1$.

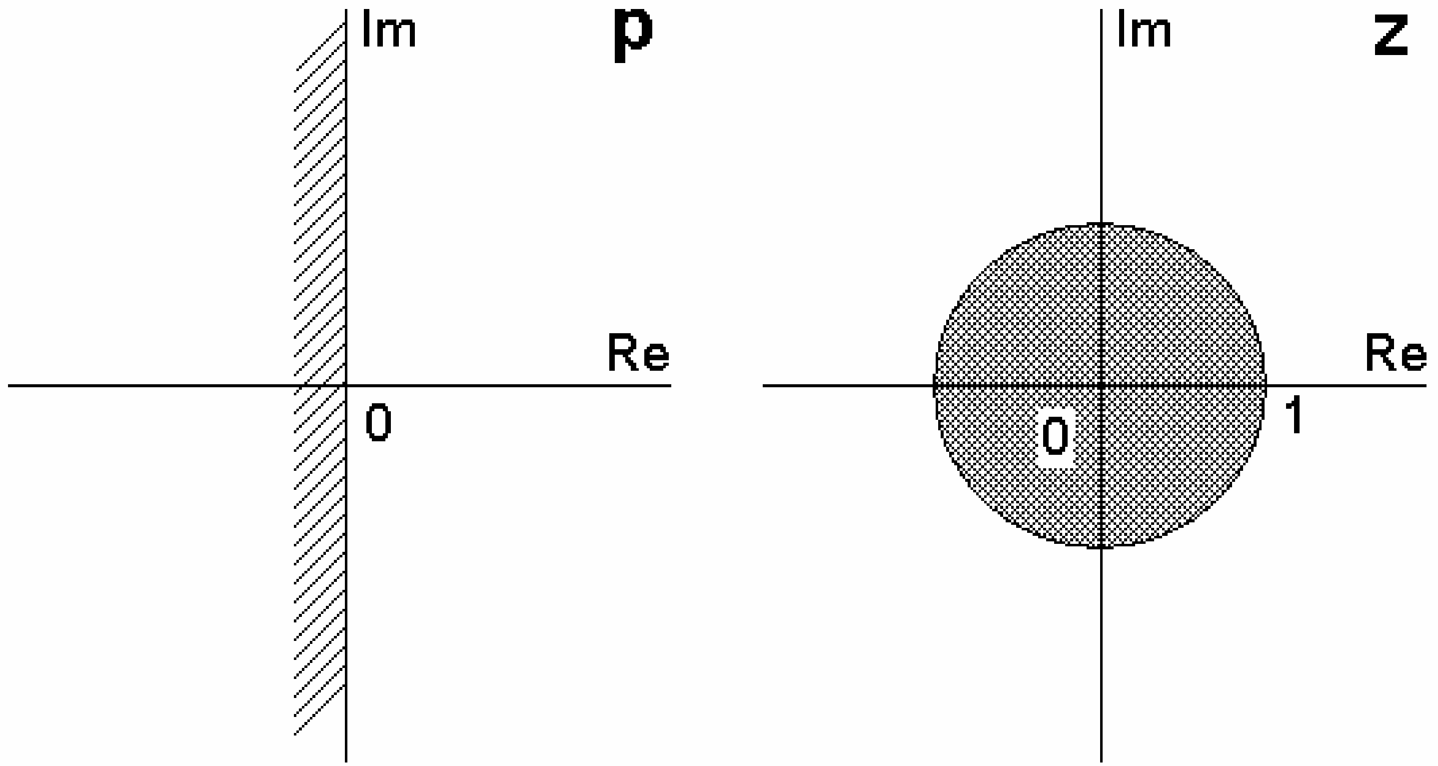
a)	$\lambda_1 = -2 + j3,\ \lambda_2 = -2 - j3$	$y_H(t) = 2e^{-2t}\cos(3t)$
b)	$\lambda_1 = -2 + j30,\ \lambda_2 = -2 - j30$	$y_H(t) = 2e^{-2t}\cos(30t)$
c)	$\lambda_1 = -1 + j30,\ \lambda_2 = -1 - j30$	$y_H(t) = 2e^{-t}\cos(30t)$
d)	$\lambda_1 = j30,\ \lambda_2 = -j30$	$y_H(t) = 2\cos(30t)$
e)	$\lambda_1 = 0.2 + j30,\ \lambda_2 = 0,2 - j30$	$y_H(t) = 2e^{0.2t}\cos(30t)$

STABILITA DISKRÉTNÍCH SYSTÉMŮ

- ☑ Stabilitu diskrétních systémů vyšetřujeme pomocí pólů systému respektive vlastních čísel matice systému.

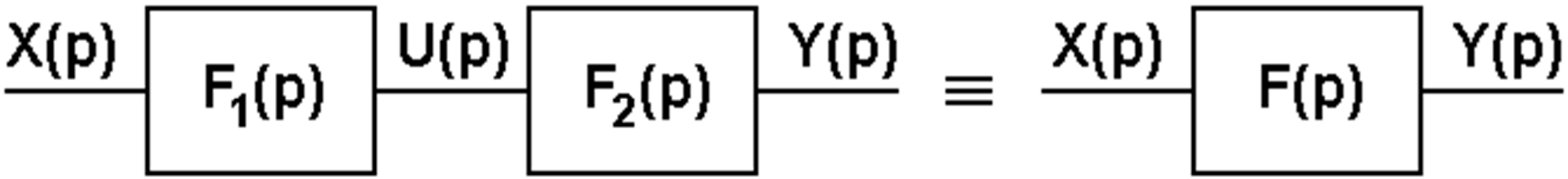
- ☑ Lineární stacionární systém je asymptoticky stabilní právě tehdy, jsou-li póly systému v absolutní hodnotě (resp. vlastní čísla matice systému M) menší než 1,.

STABILITA DISKRÉTNÍCH SYSTÉMŮ



XIII.
SPOJOVÁNÍ SYSTÉMŮ
ZPĚTNÁ VAZBA

SÉRIOVÉ (KASKÁDNÍ) ZAPOJENÍ

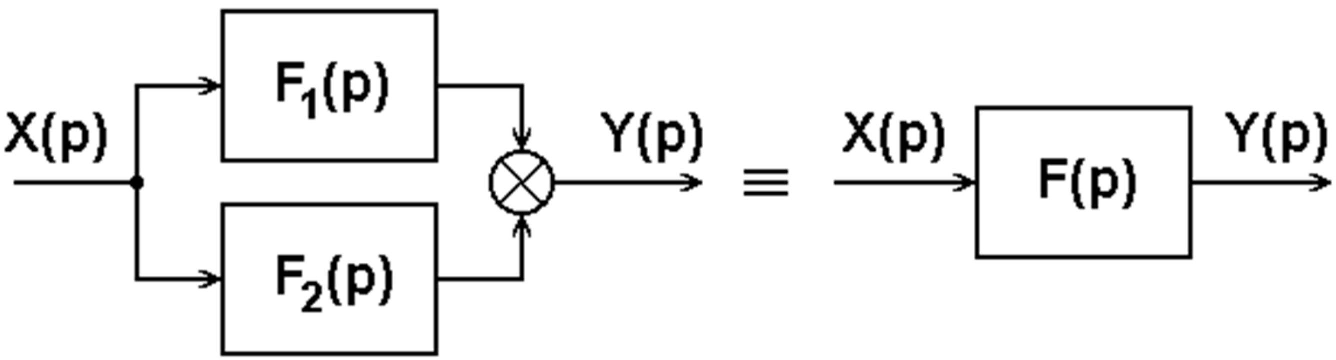


$$F_1(p) = \frac{U(p)}{X(p)} \qquad F_2(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} \qquad F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} \cdot \frac{U(p)}{U(p)} = \frac{U(p)}{X(p)} \cdot \frac{Y(p)}{U(p)} = F_1(p).F_2(p)$$

$$F(p) = \prod_{i=1}^{N} F_i(p)$$

PARALELNÍ ZAPOJENÍ

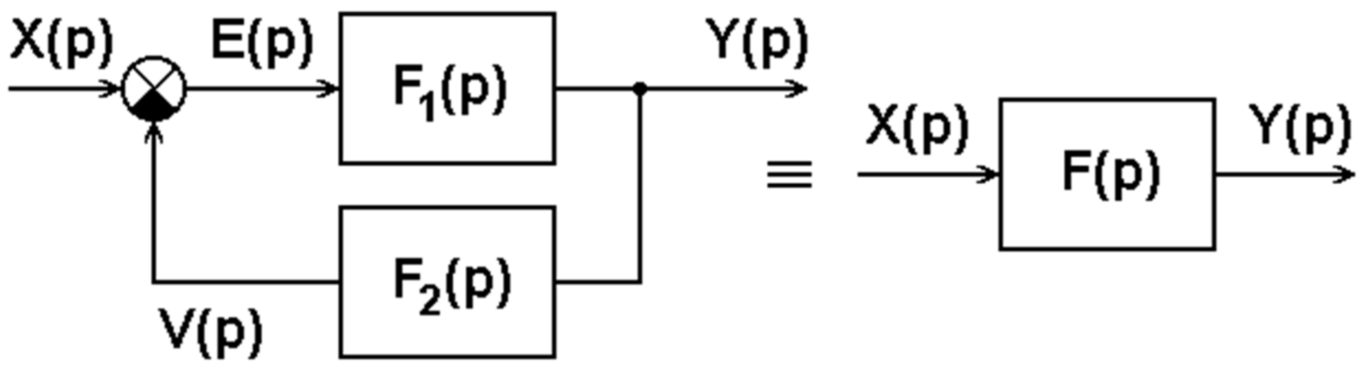


$$F_1(p) = \frac{Y_1(p)}{X(p)} \quad F_2(p) = \frac{Y_2(p)}{X(p)} \qquad F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{Y_1(p) + Y_2(p)}{X(p)} = F_1(p) + F_2(p)$$

$$F(p) = \sum_{i=1}^{N} F_i(p)$$

ZPĚTNOVAZEBNÍ ZAPOJENÍ



$$F_1(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} \qquad F_2(p) = \frac{V(p)}{Y(p)} \qquad F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

$$E(p) = X(p) - V(p) \qquad X(p) = E(p) + V(p)$$

ZPĚTNOVAZEBNÍ ZAPOJENÍ

$$F(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{Y(p)}{E(p)+V(p)}=\frac{Y(p)}{E(p)+V(p)}\cdot\frac{\frac{1}{E(p)}}{\frac{1}{E(p)}}=\frac{\frac{Y(p)}{E(p)}}{1+\frac{V(p)}{E(p)}}=\frac{\frac{Y(p)}{E(p)}}{1+\frac{V(p)}{E(p)}\cdot\frac{Y(p)}{Y(p)}}=$$

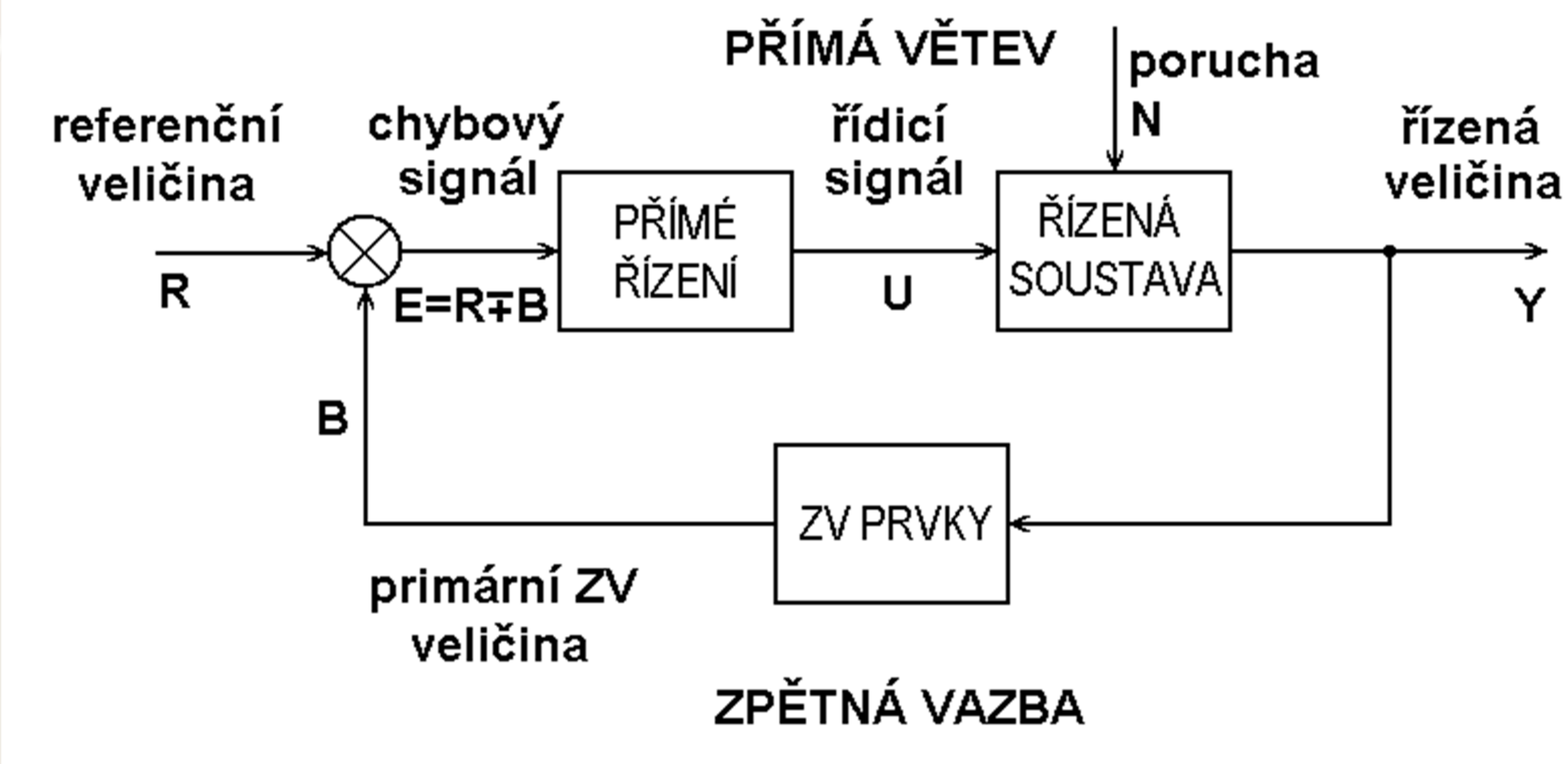
$$=\frac{\frac{Y(p)}{E(p)}}{1+\frac{Y(p)}{E(p)}\cdot\frac{V(p)}{Y(p)}}=\frac{F_1(p)}{1+F_1(p).F_2(p)}$$

$$F(p)=\frac{F_1(p)}{1-F_1(p).F_2(p)}$$

kladná ZV

$$F(p)=\frac{\text{celková přenosová funkce přímé větve}}{1\mp\text{součin celkových přenosových funkcí přímé a zpětné větve}}$$

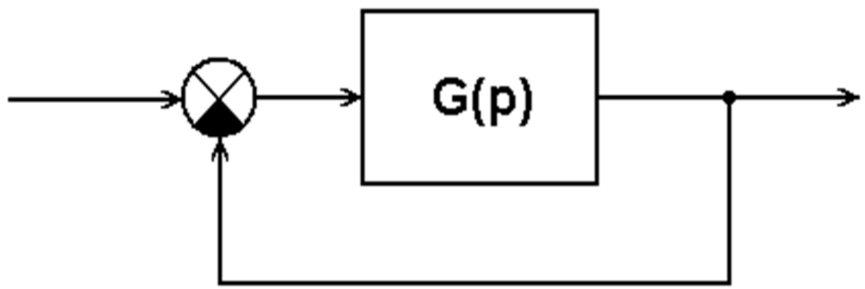
ZPĚTNÁ VAZBA
PRINCIP REGULACE



ZPĚTNÁ VAZBA
VLASTNOSTI

- ☑ zvýšená přesnost – např. schopnost věrně reprodukovat vstup;
- ☑ snížená citlivost poměru výstup/vstup na změny parametrů systému;
- ☑ snížený vliv nelinearit;
- ☑ snížený vliv vnějších poruch a šumu;
- ☑ širší rozsah frekvenčního pásma;
- ☑ tendence k oscilacím a nestabilitě;

PŘÍKLAD ROZŠÍŘENÍ FREKVENČNÍHO PÁSMA



$$G(p)=\frac{1}{p+1} \qquad G(\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$$

$$H(\omega)=\frac{G(\omega)}{1+G(\omega)}=\frac{\frac{1}{j\omega+1}}{1+\frac{1}{j\omega+1}}=\frac{\frac{1}{j\omega+1}}{\frac{j\omega+1+1}{j\omega+1}}=\frac{1}{j\omega+2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}j\omega+1}$$

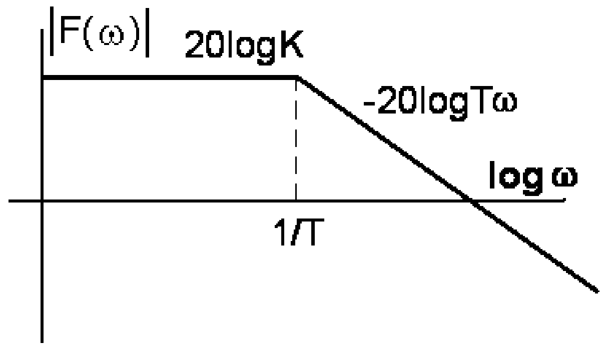
SYSTÉM SE SETRVAČNOSTÍ 1.ŘÁDU

☑ modulová logaritmická frekvenční charakteristika

$$\left|F(\omega)\right|_{dB} = 20\log\left|F(\omega)\right| = 20\log K - 20\log\sqrt{T^2\omega^2 + 1}$$

➔ pro $\omega \ll 1/T$ je $(T\omega)^2 \ll 1$ a tedy

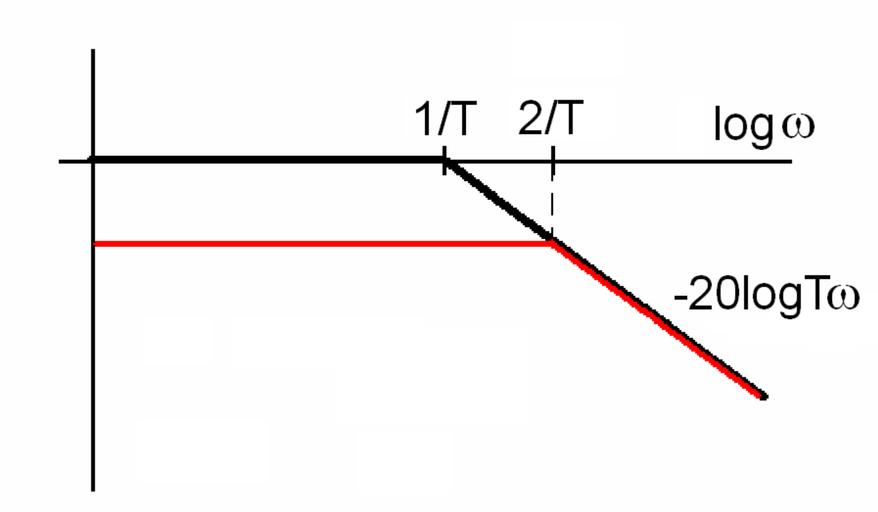
$$\left|F(\omega)\right|_{dB} = 20\log K$$



➔ pro $\omega \gg 1/T$ je $(T\omega)^2 \gg 1$ a tedy

$$\left|F(\omega)\right|_{dB} = 20\log K - 20\log T\omega$$

PŘÍKLAD ROZŠÍŘENÍ FREKVENČNÍHO PÁSMA



Tento obrázek nyní nelze zobrazit.

$$H(\omega)\big|_{dB} = 20\log K - 20\log T\omega$$

$$H(\omega)\big|_{dB} = 20\log\frac{K}{2} - 20\log\frac{T}{2}\omega = 20\log K - \cancel{20\log 2} - 20\log T\omega + \cancel{20\log 2}$$

BIOLOGICKÁ ZPĚTNÁ VAZBA

Biologická zpětná vazba je mechanismus, který prostřednictvím měření a smyslově vnímatelného znázornění stavu určitého subsystému lidského organismu umožňuje tento stav změnit volní činnosti vyšetřované osoby.

Může-li si člověk prostřednictvím určitého přístroje uvědomit stav či změnu stavu svého organismu (které by si normálně nevšimnul), např. generování EEG signálu s převažujícím výskytem složek o frekvencích z intervalu 8 – 12 Hz – rytmus alfa, pak se může naučit tento stav do určité míry ovlivňovat.

BIOLOGICKÁ ZPĚTNÁ VAZBA

Veličiny, které mohou být biologickou zpětnou vazbou vědomě modifikovány, jsou např. klidové svalové napětí, srdeční rytmus, tlak krve, periferní tok krve (vasokonstrikce, resp. vasodilatace), kožní odpor či EEG signál.

Znázornění hodnoty sledované veličiny je především vizuální (poloha ukazatele, umístění bodu na ploše obrazovky) nebo akustické (výška či hlasitost tónu). V poslední době se prosazuje forma jednoduchých počítačových her.

Možnost (schopnost) ovlivňovat stav vlastního organismu umožňuje využít tohoto principu v terapii psychických poruch různého typu.

Příprava nových učebních materiálů pro obor Matematická biologie

je podporována projektem ESF

č. CZ.1.07/2.2.00/07.0318

„VÍCEOBOROVÁ INOVACE STUDIA MATEMATICKÉ BIOLOGIE"

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
UNIVERSITAS MASARYKIANA BRUNENSIS

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ