Determinanty (1)

$$\operatorname{sign}\sigma = \prod_{1\le j<i\le n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = \pm 1$$

Praktický výpočet

$$\operatorname{sign}\sigma = (-1)^{\text{počet inverzí}}$$

Inverze je dvojice $j<i$ taková, že $\sigma(j)>\sigma(i)$.

Transpozice je permutace, která „přehodí pouze j a i"

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & & i & & j & \dots & n \end{pmatrix} = (i\,j)$$

(2)

Spočítáme znaménka transpozice

$$1\ 2\ 3\ \dots\ j-1\ \ j\ \ j+1\ \dots\ i\ \dots\ n-1\ \ n$$
$$1\ 2\ 3\ \dots\ j-1\ \ i\ \ j+1\ \dots\ i-1\ \ j\ \dots\ n-1\ \ n$$

Počet inverzí je: $(i-j)+\underbrace{1+1+\dots+1}_{i-j-1} = 2(i-j)-1$ liché číslo

$$\operatorname{sign}(j\ i) = (-1)^{2(i-j)-1} = \underline{-1}$$

Transpozice má vždy záporné znaménko.

3

A je matice $n \times n$ nad $\mathbb{K}$

Definice

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

S_n je tzv. symetrická grupa = grupa všech n-prvkových permutací

má $n!$ prvků

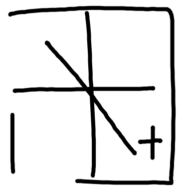
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Permutace $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

znaménko $+1$ -1

4

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$



$n = 3 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ Permutace z S_3 jsou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sign $\quad \cdot \quad - \cdot \quad 1 \quad 1 \quad \cdot \quad \cdot$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{array}{ccc|cc}
a_{11} & a_{12} & a_{23} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
1 & 2 & 3 & 1 & 2.
\end{array}$$

Saarusovo pravidlo

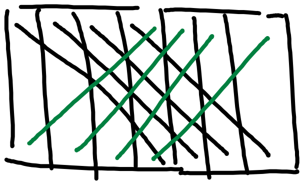
$n = 4$

sčítanců je $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$

Pro matice 4×4

žádné Saarusovo pravidlo

neplatí !



8 sčítanců

(6)

Determinant dolní trojúhelníkové matice

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \cdots & & \\ & & & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & & \cdots & 0 & \\ & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}=0$ pro $j>i$

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma\ a_{1\sigma(1)}\,a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

$a_{12}=a_{13}=\dots=a_{1n}=0$

Jediný možný nenulový činitel na 1. místě je a_{11}

$a_{23}=a_{24}=\dots=a_{2n}=0$, když $\sigma(1)=1$, pak $\sigma(2)=2,3,\dots n$

Jediný možný nenulový činitel na 2. místě je a_{22}.

(7)

$$\det A = \operatorname{sign}(id)\; a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Horní trojúhelníková matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\det A =$

$a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

Začneme posledním řádkem.

8

Jak se mění determinant matice, když s maticí provádíme úpravy

1 Nechť matice B vznikne z matice A výměnou i-tého a j-tého řádku. Potom

$$\det B = -\det A$$

$i=1, j=$

Důkaz: $\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \; b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)}$

$= \sum \operatorname{sign}\sigma \; a_{2\sigma(1)} a_{1\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$

Vezmeme permutaci $\tau \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & \dots & n \end{matrix}$ $\Bigg\|$ $\sigma \circ \tau \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \sigma(2) & \sigma(1) & \sigma(3) & \sigma(4) & & \sigma(n) \end{matrix}$

9

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \quad a_{2\,\sigma\circ\tau(2)}\; a_{1\,\sigma\circ\tau(1)}\; a_{3\,\sigma\circ\tau(3)} \cdots a_{n\,\sigma\circ\tau(n)}$$

$$= \sum \operatorname{sign} \sigma \quad a_{1\,\sigma\circ\tau(1)}\; a_{2\,\sigma\circ\tau(2)}\; a_{3\,\sigma\circ\tau(3)} \cdots a_{n\,\sigma\circ\tau(n)}$$

$$= - \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\overbrace{\sigma\circ\tau}^{\pi})\; a_{1\,\underbrace{\sigma\circ\tau}_{\pi}(1)}\; a_{2\,\underbrace{\sigma\circ\tau}_{\pi}(2)} \cdots\cdots a_{n\,\underbrace{\sigma\circ\tau}_{\pi}(n)}$$

$$= - \left(\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \quad a_{1\,\pi(1)}\, a_{2\,\pi(2)} \cdots a_{n\,\pi(n)} \right) = - \det A$$

$$\operatorname{sign}(\sigma\circ\tau) = \operatorname{sign}\sigma \cdot \underbrace{\operatorname{sign}(\tau)}_{-1} = - \operatorname{sign}\sigma$$

Jestliže σ probíhá všechny prvky S_n, pak $\sigma\circ\tau$ rovněž probíhá všechny prvky S_n.

(10)

(2) Nechť matice A (nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) má dva stejné řádky

Pak

$$\det A = 0.$$

Důsledek (1) Nechť A má stejný i-tý a j-tý řádek

Přehozením těchto řádků se matice nezmění, ale podle (1) je

$$\det A = \det B = -\det A$$

$$2 \det A = 0 \Rightarrow \det A = 0.$$

11

(3) Nechť matice B vznikne z matice A vynásobením i-tého řádku číslem c. Potom

$$\det B = c \cdot \det A$$

Důkaz: $\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)}$ $\quad i = 2$

$$= \sum \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma(1)} \, c \, a_{2\sigma(2)} \, a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= c \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \right) = c \det A$$

12

4 Nechť A a B se liší pouze v i-tém řádku.

Nechť C je taková matice, že

$$r_j(C) = r_j(A) = r_j(B) \quad \text{pro } j \neq i$$

$$r_i(C) = r_i(A) + r_i(B)$$

Pak

$$\det C = \det A + \det B$$

Neplatí $\cancel{\det(A+B) = \det A + \det B}$

13

Dim. ④ $\quad i=2$

$$\det C = \sum \operatorname{sign}\sigma \quad c_{1\sigma(1)}\, c_{2\sigma(2)}\, c_{3\sigma(3)} \cdots c_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum \operatorname{sign}\sigma \quad c_{1\sigma(1)} \left(a_{2\sigma(2)} + b_{2\sigma(2)}\right) c_{3\sigma(3)} \cdots c_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum \operatorname{sign}\sigma \; c_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)}\, c_{3\sigma(3)} \cdots c_{n\sigma(n)} \; +$$

$$+ \sum \operatorname{sign}\sigma \; c_{1\sigma(1)}\, b_{2\sigma(2)}\, c_{3\sigma(3)} \cdots c_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum \operatorname{sign}\sigma \; a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)}\, a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum \operatorname{sign}\sigma \; b_{1\sigma(1)}\, b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

$$= \det A + \det B \,.$$

14

5 Jestliže matice B vznikne z A tak, že k i-tému řádku přičteme c-násobek j-tého řádku $(i \neq j)$, pak

$$\det B = \det A$$

<u>Důkaz</u>: Nechť $i = 1$, $j = 2$. Podle 4

$$B = \begin{pmatrix} r_1(A) + c\, r_2(A) \\ r_2(A) \\ r_3(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix}$$

$$\det B = \det \begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_2(A) \\ r_3(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} c\, r_2(A) \\ r_2(A) \\ r_3(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix}$$

$$= \det A + c \det \begin{pmatrix} r_2(A) \\ r_2(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix} = \det A + c \cdot 0$$

$$= \det A$$

15

6 $\det A^T = \det A$

Důkaz: $A^T = (b_{ij})$ $A = (a_{ij})$ $\boxed{b_{ij} = a_{ji}}$

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

16

$\sigma \circ \sigma^{-1} = id$

$1 = \operatorname{sign} id = \operatorname{sign}(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \operatorname{sign} \sigma \cdot \operatorname{sign} \sigma^{-1} \Rightarrow \operatorname{sign} \sigma^{-1} = \operatorname{sign} \sigma$

jestliže σ probíhá všechny prvky grupy S_n, pak σ^{-1} také probíhá všechny prvky S_n.

$$= \sum_{\substack{\sigma^{-1} \in S_n \\ \pi}} \operatorname{sign} \overset{\pi}{\sigma^{-1}} \; a_{1\underset{\pi}{\sigma^{-1}(1)}} \, a_{2\underset{\pi}{\sigma^{-1}(2)}} \cdots a_{n\underset{\pi}{\sigma^{-1}(n)}} = \det A$$

7 Pravidla 1 – 5 platí i pro sloupce!

Plyne z 6

17

Příklad

$$\det\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & a \end{pmatrix}$$

Všechny řádky přičteme k 1. řádku

$$= \det\begin{pmatrix} a+n-1 & a+n-1 & a+n-1 & \cdots a \\ 1 & a & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & a & \cdots \\ \cdots & & & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

18

$$= (a+n-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix} =$$

Od 2., 3., ... n-tého řádku odečteme 1. řádek

$$(a+n-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

horní $\triangle$ matice

$$= \underline{\underline{(a+n-1)\,(a-1)^{n-1}}}$$

19

<u>Věta</u> Nechť B je matice $k \times k$, C matice $(n-k) \times (n-k)$ a D matice $k \times (n-k)$. Potom

$$\det \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{matrix} \}k \\ \}n-k \end{matrix} = \det B \cdot \det C$$

$$\begin{matrix} \underbrace{\quad}_{k} & \underbrace{\quad}_{n-k} \end{matrix}$$

Analogicky

$$\det \begin{pmatrix} B & 0 \\ F & C \end{pmatrix} = \det B \cdot \det C$$

20

Důkaz $A = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$

$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \cdots\cdots \quad a_{i\sigma(i)}$

jestliže $i \geq k+1$ a $\sigma(i) \leq k$, pak $a_{i\sigma(i)} = 0$.

Proto možné nenulové součiny jsou takové, kde

$$\sigma(k+1, k+2, \ldots n) \cap \{1, 2, \ldots, k\} = \emptyset$$

Tedy

$$\sigma(1, 2, \ldots k) = \{1, 2, \ldots k\}$$

$$\sigma(k+1, \ldots n) = \{k+1, k+2, \ldots, n\}$$

(21)

Píšeme-li tedy pouze možné nenulové členy je

$$\det A = \sum \operatorname{sign}\sigma \; a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{k\tau(k)} \; a_{k+1\,\pi(k+1)} \cdots a_{n\,\pi(n)}$$

$$\tau \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \sigma(k) & k+1 & & n \end{pmatrix} \qquad \pi \circ \tau = \sigma$$

$$\pi \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & & k & \sigma(k+1) & & \sigma(n) \end{pmatrix} \qquad \operatorname{sign}\pi \cdot \operatorname{sign}\tau = \operatorname{sign}\sigma$$

$$= \sum_{\tau \circ \pi} \operatorname{sign}\tau \; a_{1\tau(1)} \cdots a_{k\tau(k)} \; \operatorname{sign}\pi \; a_{k+1\,\pi(k+1)} \cdots a_{n\,\pi(n)}$$

$$= \Big(\sum_{\tau} \operatorname{sign}\tau \; a_{1\tau(1)} \cdots a_{k\tau(k)} \Big) \Big(\sum_{\pi} \operatorname{sign}\pi \; a_{k+1,\pi(k+1)} \cdots a_{n\pi(n)} \Big) = \det B \cdot \det$$

$$= \det B \cdot \det C$$