# Determinanty

1

$A$ $n\times n$ matice

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \quad a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$A$ horní $\Delta$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$A$ dolní $\Delta$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ * & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \det A = \text{——}\,\|\,\text{——}$$

2

Úpravy matice:

- výměna 2 řádků — det násobíme $(-1)$
- vynásobení řádku číslem $c$ — det násobíme číslem $c$
- k $i$-tému přičteme $c$-násobek $j$-tého — det se nezmění

Totéž platí pro sloupce

$$\det A = \det A^T$$

$$\det \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\,k \\ \}\,n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{k} & \underbrace{\quad}_{n-k} \end{array} \end{array} = \det A \cdot \det C \qquad \det \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array}\right) = \det A \det C$$

3

**Příklad.** Vandermondův determinant

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = D_n(x_1, x_2, \dots x_n)$$

Naším cílem je spočítat $D_n(x_1, \dots x_n)$ pomocí $D_{n-1}(x_2, \dots)$

1. řádek odečteme od všech ostatních

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 & & x_2^{n-2} - x_1^{n-2} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & x_n^3 - x_1^3 & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$x_2^i - x_1^i = (x_2 - x_1)\left(x_2^{i-1} + x_2^{i-2} x_1 + x_2^{i-3} x_1^2 + \dots + x_2 x_1^{i-2} + x_1^{i-1}\right)$$

4

$$= \det(1)\,\det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 & \cdots & \cdots & x_2^{n-1}-x_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n-x_1 & x_n^2-x_1^2 & \cdots & \cdots & x_n^{n-1}-x_1^{n-1} \end{pmatrix} =$$

Co je zde?*
Zeptejte se těch, co chodí na přednášku!

$$= \det\begin{pmatrix} \overset{1}{x_2-x_1} & (x_2-x_1)\overset{x_2+x_1}{(x_2+x_1)} & (x_2-x_1)\overset{x_2^2+x_2x_1+x_1^2}{(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)} & \cdots\cdots & (x_2-x_1)(x_2^{n-2}+x_2^{n-3}x_1 \\ x_3-x_1 & (x_3-x_1)(x_3+x_1) & \cdots & & \\ x_n-x_1 & (x_n-x_1)(x_n+x_1) & \cdots & & \end{pmatrix}$$

*

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\,\det\begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{x_2}+x_1 & \underline{x_2^2}+x_2x_1+x_1^2 & \cdots & \underline{x_2^{n-2}}+x_2^{n-3}x_1+\cdots \\ \underline{1} & \underline{x_3}+x_1 & \underline{x_3^2}+x_3x_1+x_1^2 & \cdots & \underline{x_3^{n-2}}+x_3^{n-3}x_1+\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \end{pmatrix}$$

6

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\det\begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 + x_1 \cdot 1.\text{sloupec} & x_3^2 + x_1 \cdot 2.\text{sloupec} & \cdots & x_3^{n-2} + x \cdot (n-2)\text{hý sloupec} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

Provedeme následující úpravu

Od $(n-1)$ního sloupce odečteme $x_1 \cdot (n-2)$h

od $(n-2)$hého sloupce odečteme $x_1 \cdot (n-3)$tí

atd až od

od 2hého odečteme $x_1 \cdot$ prvý

Dostaneme:

5

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \dots & x_3^{n-2} \\ \dots & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) D_{n-1}(x_2, x_3, \dots x_n)$$

Odvodili jsme rekurentní vztah

$$D_n(x_1, x_2, \dots x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) D_{n-1}(x_2, x_3, \dots, x_n) =$$
$$= (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_n - x_2) \dots \dots (x_n - x_{n-1}) D_1(x_n)$$

7!.

$$= \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j) \cdot D_1(x_n) = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \det(1) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

CAUCHYOVA VĚTA jsou-li $A, B$ matice $n \times n$, pak

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

8

Důkaz: Uvažme matici $2n \times 2n$ $\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix}$

Determinant této matice spočítáme dvojím způsobem. Jedním výpočtem dostaneme pravou stranu a druhým levou stranu v Cauchyově větě.

Pravá strana

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -E & B \end{array}\right) = \det A \cdot \det B$$

Levá strana

Úpravami, které nemění det dostaneme

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -E & B \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} A & A \cdot B \\ \hline -E & 0 \end{array}\right)$$

Ukážeme si za chvíli.

9

$$\det\begin{pmatrix} A & AB \\ -E & 0 \end{pmatrix} = (-1)^n \det\left(\begin{array}{c|c} -E & 0 \\ \hline A & AB \end{array}\right) = (-1)^n \det(-E)\cdot\det(AB)$$

$n\times$ přehodíme dvojice řádků

$$= (-1)^n (-1)^n \det(AB) = \underline{\det AB}$$

pravá strana Cauchyovy věty

Ukážeme, jak udělat úpravu

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ -E & B \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} A & AB \\ -E & 0 \end{array}\right)$$

10

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \overset{3.s + b_{11}\, 1.s}{\sim} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \overset{3.s + b_{21}\cdot 2}{\sim}$$

1. sloupec AB

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{11}b_{11} + a_{12}\cdot b_{21}} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & -1 & 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

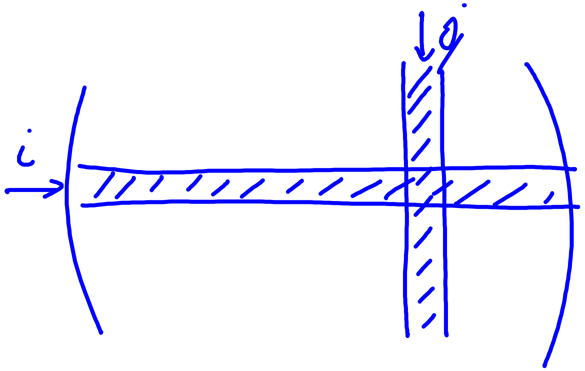
stejné úpravy pro 4. sloupec

$$\sim \begin{pmatrix} A & AB \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

11

# Laplaceův rozvoj determinantu

Matice $n \times n$ $\quad A = (a_{ij})$ $\quad$ $i$ řádek, $j$ sloupec




Vyškrtnutím $i$-tého řádku a $j$-tého sloupce dostaneme matici $(n-1)\times(n-1)$, kterou označíme $A_{ij}$

$\det A_{ij}$ .... minor řádu $(n-1)$ v determinantu matice $A$

12

Algebraický doplněk prvku $a_{ij}$ v matici $A$ je číslo

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Laplaceův rozvoj determinantu podle i-tého řádku

$A$ matice $n \times n$, $i$ nechť je pevné. Potom

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{a}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

13

## Laplaceův rozvoj determinantu podle j-té sloupce

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \tilde{a}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

## Příklad na Laplaceův rozvoj (matice $(n+1)\times(n+1)$)

rozvoj podle 1. sloupce

$$\det \begin{pmatrix} a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ a_1 & & & & x & -1 \\ a_0 & & & & & x \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a_n \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & x \end{pmatrix}$$

14

$$+(-1)^{2+1} a_{n-1} \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & x \end{pmatrix} + \cdots +$$

DU i-ty člen je

$a_{n-i+1} x^{n-i+1}$

$$+(-1)^{n+1+1} a_0 \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & & x & -1 \end{pmatrix} = a_n x^n - a_{n-1}(-1)x^{n-1} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+2} a_0 (-1)^n$$

$$= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

15

4-ti člen Laplaceova rozvoje

$$\begin{array}{c|cccccc} a_n & (-1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-2} & 0 & x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_{n-3} & 0 & 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ \hline a_{n-4} & 0 & 0 & 0 & x & -1 & 0 \end{array}$$

$$A_{41} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & - \end{array}\right.$$

$$\det A_{41} = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & x & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & x & -1 & \dots \end{pmatrix} = (-1)^3 x^{n-}$$

16

4. tý člen Laplaceova rozvoje je

$$(-1)^{4+1} a_{n-3} \cdot (-1)^3 x^{n-3} = a_{n-3} x^{n-3}$$

$$\det A = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} \dots + a_1 x + a_0$$