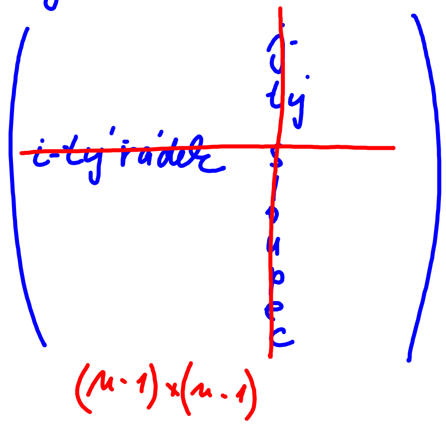
LAPLACEŮV ROZVOJ DETERMINANTU

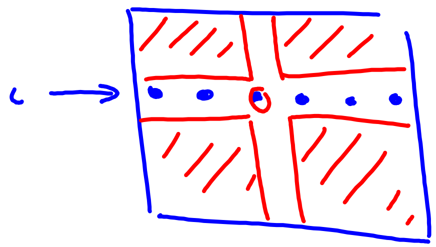
Algebraický doplněk prvku a_{ij} v matici A je číslo

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det$$



Laplaceův rozvoj podle i-tého řádku

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \tilde{a}_{ij}$$

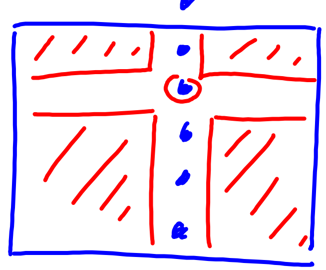


(2)

Laplaceův rozvoj podle j-tého sloupce

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \tilde{a}_{ij}$$

j



Důkaz rozvoje podle i-tého řádku

i-tý řádek matice A je součet n řádků, které vypadají takto:

$$s_i(A) = (a_{i1}\ 0\ 0\ \ldots\ 0) + (0\ a_{i2}\ 0\ \ldots\ 0) + (0\ 0\ a_{i3}\ 0\ \ldots\ 0) + \ldots (0\ 0\ \ldots\ 0\ a_{in})$$

③

Podle pravidla (3) nebo (4) pro počítání s determinanty platí

$$\det A = \det\begin{pmatrix} \text{/ / / / / / /} \\ a_{i1}\ 0\ 0\ \dots\ 0 \\ \text{/ / / / / / /} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \text{/ / / / / / /} \\ 0\ a_{i2}\ 0 \dots 0 \\ \text{/ / / / / / /} \end{pmatrix} + \dots + \det\begin{pmatrix} \text{/ / / / / / /} \\ 0\ 0\ 0\ \dots\ a_{in} \\ \text{/ / / / / / /} \end{pmatrix}$$

$$= a_{i1}\det\begin{pmatrix} \text{/ / / / / / /} \\ 1\ 0\ 0 \dots 0 \\ \text{/ / / / / / /} \end{pmatrix} + a_{i2}\det\begin{pmatrix} \text{/ / / / / / /} \\ 0\ 1\ 0 \dots 0 \\ \text{/ / / / / / /} \end{pmatrix} + \dots + a_{in}\det\begin{pmatrix} \text{/ / / / / / /} \\ 0\ 0\ 0\ \dots \\ \text{/ / / / / / /} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\det\begin{array}{c} \qquad\qquad j \\ \begin{pmatrix} \text{/ / / / / / /} \\ 0\ 0 \dots \boxed{1}\ 0 \dots 0 \\ \text{/ / / / / / /} \end{pmatrix} \leftarrow i \end{array} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{j-1}\det\begin{pmatrix} \text{/ / / / / / /} \\ 1\ 0\ 0 \dots 0 \\ \text{/ / / / / / /} \end{pmatrix}$$

4

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{j-1} (-1)^{i-1} \det \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & A_{ij} & & \end{array} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{j+i-2} \det (1) \cdot \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \underbrace{(-1)^{i+j} \det A_{ij}}_{\tilde{a}_{ij}}$$

INVERZNÍ MATICE
pomocí algebraických doplňků

Věta. Čtvercová matice A má inverzní matici, právě když $\det A \neq 0$. V tomto případě $A^{-1} = \left(\frac{\tilde{a}_{ij}}{\det A} \right)^T$.

5

Důkaz: Nechť A^{-1} existuje. Pak $A\cdot A^{-1}=E$. Proto

$$\det(A\,A^{-1}) = \det E = 1$$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \quad \Rightarrow \det A \neq 0.$$

Nechť $\det A \neq 0$. Vezmeme matici $B = (b_{ij}) = (\tilde{a}_{ij})^T$

$$\left[A\cdot\left(\frac{1}{\det A}\cdot B\right)\right]_{ij} = \frac{1}{\det A}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}\right) = \frac{1}{\det A}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\tilde{a}_{jk}\right)$$

$\boxed{i=j}$

$$= \frac{1}{\det A}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\tilde{a}_{ik}\right) =$$ Laplaceův rozvoj matice A podle i-tého řádku $$= \frac{1}{\det A}\cdot \det = 1$$

6

$\boxed{i \neq j}$

$$= \frac{1}{\det A}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\tilde{a}_{jk}\right) = \frac{1}{\det A}\left(\text{Lapl. rozvoj matice } \begin{array}{ll} s_1(A) & \\ \vdots & \\ s_i(A) & \leftarrow i \\ \vdots & \\ s_i(A) & \leftarrow j \\ \vdots & \\ s_n(A) & \end{array} \text{ podle } j\text{-tého řádku}\right)$$

$= \frac{1}{\det A} \cdot 0 = 0$ neboť det matice se 2 stejnými řádky je roven 0.

Dokázali jsme, že $A \cdot \frac{B}{\det A} = E \Rightarrow A^{-1} = \left(\frac{a_{ij}}{\det A}\right)^T$

7

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 21 & 13 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1}\; 8 = 8$$

$$\tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2}\,(-2) = 2$$

$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1}\,(13) = -13$$

$$\tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2}\,(21) = 21$$

$$(\tilde{a}_{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -13 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 21 \cdot 8 + 2 \cdot 13 = 168 + 26 = 194$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(\tilde{a}_{ij}\right)^T = \frac{1}{194}\begin{pmatrix} 8 & -13 \\ 2 & 21 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{194}\begin{pmatrix} 8 & -13 \\ 2 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 21 & 13 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

8

$$= \frac{1}{194}\begin{pmatrix}194 & 0\\ 0 & 194\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

CRAMEROVO PRAVIDLO

Věta: Nechť A je matice $n \times n$ s $\det A \neq 0$. Potom soustava lineárních rovnic

$$Ax = b \qquad A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

má řešení:

9 ↙ i-tý sloupec

$$x_i = \frac{\det\begin{pmatrix} s_1(A) \ldots s_{i-1}(A) & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} & s_{i+1}(A) \ldots s_n(A) \end{pmatrix}}{\det A}$$

Důkaz: Jestliže $\det A \neq 0$, pak $A^{-1} = \left(\frac{\tilde{a}_{ij}}{\det A} \right)^T$.

Rovnici $Ax = b$

vynásobíme maticí A^{-1} zleva:

$$A^{-1}Ax = \underline{x = A^{-1}b}$$

10

Dosadíme za A^{-1}.

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} (A^{-1})_{ij}\, b_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{a}_{ji}}{\det A}\, b_j =$$

$$= \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} b_j\, \tilde{a}_{ji}$$

alg. doplňky k prvkům v i-tém sloupci

i-tý sloupec

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \text{Lapl. rozvoj } \det \begin{pmatrix} s_1(A) \ldots & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} & \ldots\ s_n(A) \end{pmatrix}$$

11

Laplaceův rozvoj podle více řádků (sloupců)

Nechť i_1, i_2 jsou dva řádky, j_1, j_2 dva sloupce

A je matice se členy a_{ij} typu $n \times n$

Nechť $A_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}$ je matice $(n-2) \times (n-2)$, která vznikne

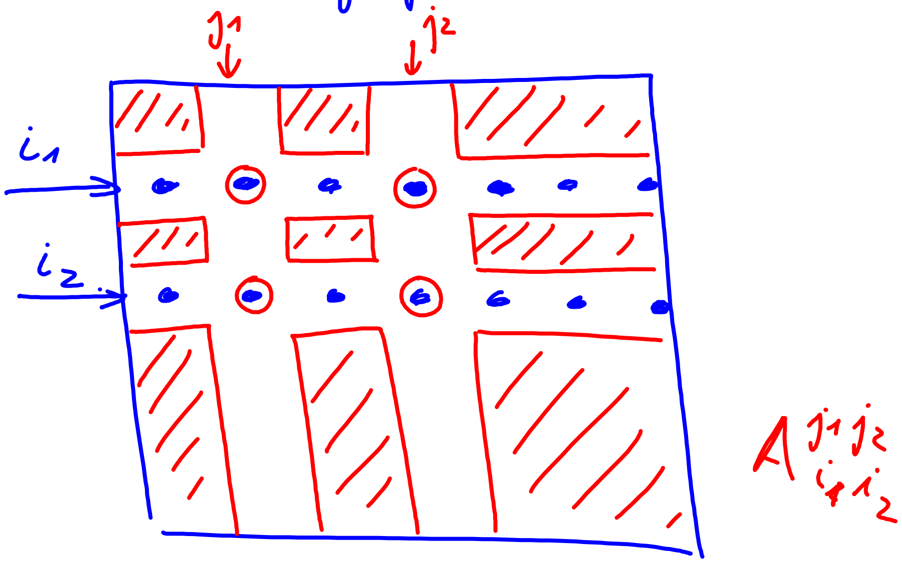
z A vyškrtnutím řádků i_1, i_2 a sloupců j_1, j_2

Laplaceův rozvoj matice A podle řádků i_1 a i_2 je

rovnost

12

$$\det A = \sum_{1 \le j_1 < j_2 \le n} (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} \det \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} \end{pmatrix} \det A^{j_1 j_2}_{i_1 i_2}$$



13

Příklad

$$D_n = \det\begin{pmatrix} a & & & & & & & & b\\ & \ddots & & & 0 & & & \iddots & \\ & & a & & & & b & & \\ 0 & 0 & 0 & a & & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & & d & 0 & 0 & 0 \\ & & c & & & & d & & \\ & \iddots & & & 0 & & & \ddots & \\ c & & & & & & & & d \end{pmatrix} \quad 2n$$

$$2n$$

Udělame Laplaceův rozvoj podle n-tého a (n+1)-ního řádku

$$D_n = \sum_{1\le j_1<j_2\le 2n} (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} \det\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2}\\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2}\end{pmatrix} \det A^{j_1 j_2}_{i_1 i_2} =$$

$(2n-2)\times(2n-2)$

$$= (-1)^{n+n+1+n+n+1} \det\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} a & & & & b\\ & \ddots & & \iddots & \\ & & a\ b & & \\ & & c\ d & & \\ & \iddots & & \ddots & \\ c & & & & d\end{pmatrix} = (ad-bc)\,D_{n-1}$$

14

$$D_n = (ad - bc)\, D_{n-1}$$

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \quad \Rightarrow \quad D_n = (ad-bc)^n$$

K čemu jsou determinanty dobré?

① K výpočtu vlastních čísel matic (2. semestr)

② Determinant má geom. význam jako orientovaný objem

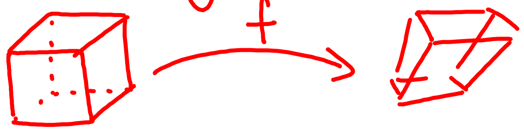
$$\int F(x)\,dx = \int F(f(t))\, f'(t)\, dt$$

15

Věta o substituci pro vícerozměrný integrál

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x)\,dx = \int F(f(t)) \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}(t)\right) dt$$



$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

$x_1 = f_1(t_1, t_2, \ldots, t_n)$

$x_2 = f_2(t_1, t_2, \ldots, t_n)$

$\vdots$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial f_1}{\partial t_2}(t) \\ \frac{\partial f_2}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial f_2}{\partial t_2}(t) \end{pmatrix}$$

16

Determinant jako orientovaný objem (obsah)

Pro jednoduchost budeme brát matice 2×2

A ... matice 2×2 $\quad A = \begin{pmatrix} s_1(A) & s_2(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}$

Orientovaný objem rovnoběžníku určeného vektory (u, v)

rovnoběžník má vrcholy

$0, u, v, u+v$

V $\mathbb{R}^3$ (u, v, z) rovnoběžnostěn

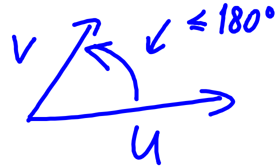
$0, u, v, z, u+v, u+z, v+z, u+v+z$

17

Požadavky na orientovaný obsah $\quad P : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

geometrická představa

$P(u,v) =$ obsah rovnoběžníku, jestliže u,v jsou orientovány kladně



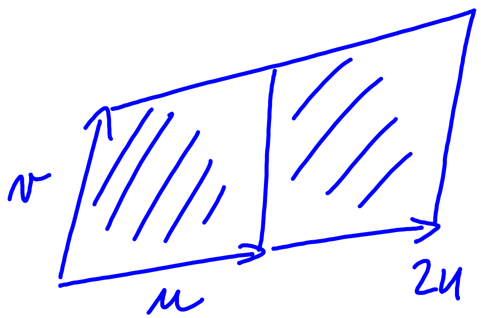
kladná orientace

$P(u,v) = -$ obsah rovnoběžníku, je-li orientace (u,v) záporná

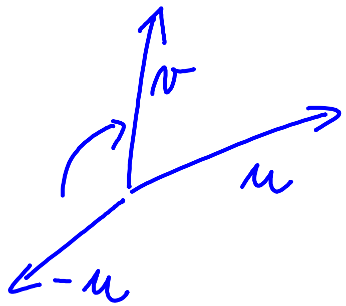
1) $P(cu,v) = cP(u,v)$

18

$c = 2$



$c = -1$

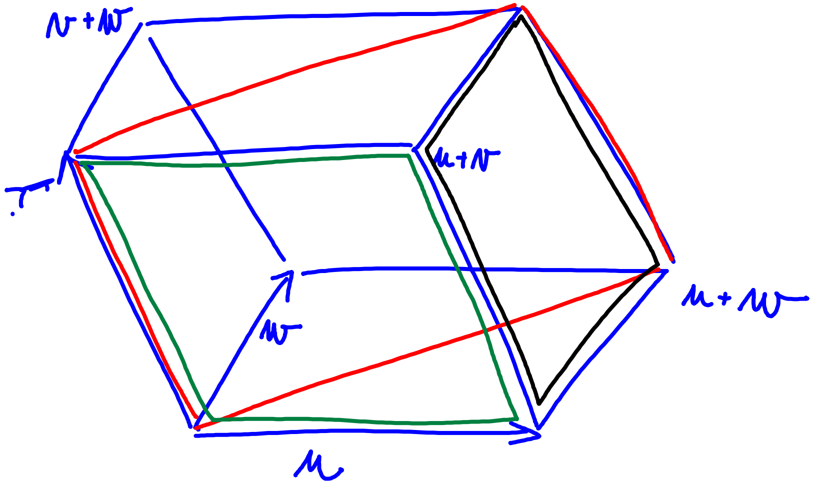


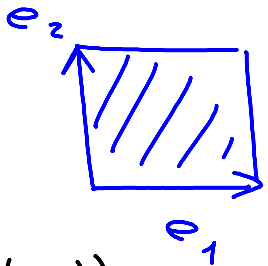
$(-u, v)$ má opačnou orientaci než (u, v)

$$P(-u, v) = -P(u, v)$$

19

$$\text{(2)}\quad P(u+w, v) = P(u,v) + P(w,v)$$





$$\text{(3)}\quad P(e_1, e_2) = 1$$

Příště ukážeme, že $P\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$