Písemná zkouška z Diskrétní matematiky
4. 1. 2015 (1. termín)

Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	Součet

Každý příklad je hodnocen 16 body. Pro odpovědi využijte volného prostoru mezi příklady. Test trvá 100 minut.

1. Nechť $X = \{0, 1, 2\}$ je množina a $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ systém jejích podmnožin. Pro každou z následujících formulí nalezněte nějaký systém, který formuli splňuje a nějaký systém (ten v odpovědi označte jako $\mathcal{B}$), který ji nesplňuje. Pokud takový $\mathcal{A}$ nebo $\mathcal{B}$ neexistuje, dokažte to.

a) $(\forall X, Y \in \mathcal{A})(X \cap \{0, 1\} = Y \cap \{0, 1\} \;\rightarrow\; X = Y)$.

b) $(\forall X, Y \in \mathcal{A})(X \subseteq Y \;\vee\; Y \subseteq X)$.

c) $(\forall x, y \in X)(\exists Y \in \mathcal{A})((x \in Y \;\wedge\; y \notin Y) \;\vee\; (x \notin Y \wedge y \in Y))$.

d) $(\forall Y \in \mathcal{A})(X - Y \in \mathcal{A})$.

2. Sestrojte (nebo dokažte, že neexistuje)

a) nějaké surjektivní izotonní zobrazení
$f : (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq) \to (\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \subseteq)$,

b) nějaký izomorfismus uspořádaných množin
$g : (\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \subseteq) \to (\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \supseteq)$.

3. Nechť R, S, T jsou relace na množině X. Dokažte, že platí:

a) $(R \circ S^{-1})^{-1} = S \circ R^{-1}$,

b) $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$.

4. Načrtněte všechny vzájemně neizomorfní grafy s pěti vrcholy a šesti hranami.

5. a) Určete počet permutací (tj. bijekcí na sebe) n-prvkové množiny A, které splňují $(\forall x \in A)(f(x) \neq x)$ (tj. nemají pevný bod).

b) Určete počet maximálních párování úplného bipartitního grafu $K_{m,n}$. (Připomeňme, že párování je podgraf, jehož žádné dvě hrany nemají společný vrchol.)

Řešení

1. a) Formule říká, že všechny množiny systému $\mathcal{A}$ „jsou rozlišovány“ průnikem s $\{0,1\}$. Můžeme tedy vzít třeba $\mathcal{A} = \{\{0\},\{1\}\}$, ale stačilo by i $\mathcal{A} = \emptyset$. $\mathcal{B}$ musí obsahovat nějaké množiny lišící se právě prvkem 2, tedy například $\mathcal{B} = \{\{0\},\{0,2\}\}$ nebo rovnou $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$.

b) Formule říká, že všechny množiny systému $\mathcal{A}$ jsou porovnatelné inkluzí. Vezmeme třeba $\mathcal{A} = \emptyset, \mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$.

c) Chceme, aby pro libovolné dva prvky systém obsahoval množinu, která z těchto prvků obsahuje jen jeden ale ne druhý. Prvky x, y jsou libovolné, může se tedy stát, že $x = y$. Pak je ovšem žádnou množinou oddělit nelze, systém $\mathcal{A}$ dané vlastnosti tedy neexistuje. $\mathcal{B}$ lze zvolit libovolně, např. $\mathcal{B} = \emptyset$.

d) S každou množinou chceme mít v $\mathcal{A}$ i její doplněk v X. Zvolíme třeba $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X), \mathcal{B} = \{\{0\}\}$.

2. a) Nejpřirozenější je za f vzít zobrazení, které z každé podmnožiny $\mathbb{N}$ vyhodí všechny prvky různé od $1, 2, 3$ nebo 4, tedy

$$f(X) = X \cap \{1,2,3,4\}.$$

Snadno nahlédneme, že f zachovává inkluzi a je tedy izotonní. Každá podmnožina $\{1,2,3,4\}$ je obrazem sebe sama, f je tedy také surjektivní.

b) Hledáme bijekci, která otáčí uspořádání. Nejjednodušší způsob je zobrazit každou podmnožinu na její doplněk, tj.

$$g(X) = \{1,2,3,4\} - X.$$

Protože doplněk doplňku je původní podmnožina, g je sama k sobě inverzní, a je to tedy bijekce. Stačí se už jen přesvědčit, že $X \subseteq Y$ implikuje $\{1,2,3,4\} - Y \subseteq \{1,2,3,4\} - X$, tedy $g = g^{-1}$ je izotonní.

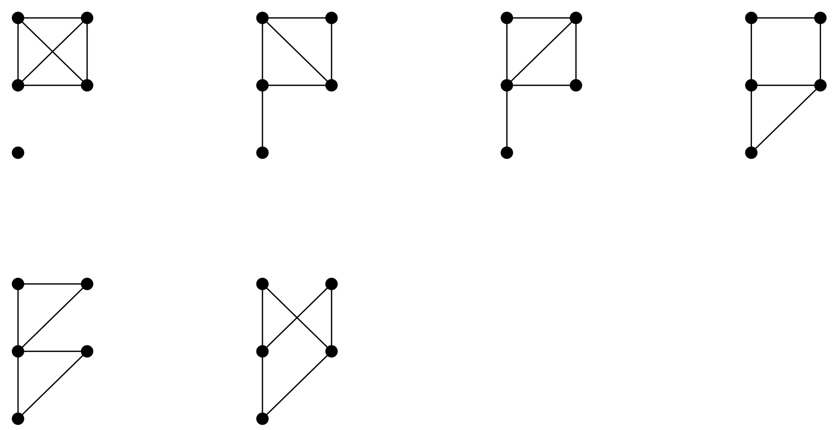
3. a)

$$\begin{aligned}
(R \circ S^{-1})^{-1} &= \{(x,y) \mid (y,x) \in R \circ S^{-1}\} \\
&= \{(x,y) \mid (\exists z)((y,z) \in S^{-1} \ \wedge \ (z,x) \in R)\} \\
&= \{(x,y) \mid (\exists z)((z,y) \in S \ \wedge \ (z,x) \in R)\}, \\
S \circ R^{-1} &= \{(x,y) \mid (\exists z)((x,z) \in R^{-1} \ \wedge (z,y) \in S)\} \\
&= \{(x,y) \mid (\exists z)((z,x) \in R \ \wedge (z,y) \in S)\}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
(R \cup S) \circ T &= \{(x,y) \mid (\exists z)((x,z) \in T \ \wedge \ (z,y) \in R \cup S)\} \\
&= \{(x,y) \mid (\exists z)((x,z) \in T \ \wedge \ ((z,y) \in R \ \vee \ (z,y) \in S)\} \\
&= \{(x,y) \mid (\exists z)(((x,z) \in T \ \wedge \ (z,y) \in R) \ \vee \ ((x,z) \in T \ \wedge \ (z,y) \in S))\}, \\
(R \circ T) \cup (S \circ T) &= \{(x,y) \mid (x,y) \in R \circ T \ \vee \ (x,y) \in S \circ T\} \\
&= \{(x,y) \mid (\exists z)((x,z) \in T \ \wedge (z,y) \in R) \ \vee \ (\exists z)((x,z) \in T \ \wedge (z,y) \in S)\} \\
&= \{(x,y) \mid (\exists z)(((x,z) \in T \ \wedge (z,y) \in R) \ \vee \ ((x,z) \in T \ \wedge (z,y) \in S))\}.
\end{aligned}$$

4.



Grafy nejsou izomorfní, neboť si ve většině případů neodpovídají stupně všech vrcholů (tzv. skóre grafu). Jediná dvojice se stejným skórem je 4. a 6. graf, ty rozlišíme např. pozorováním, že 3. graf má kružnici délky 3, zatímco 6. graf ji nemá. Pokud předpokládáme, že dolní vrchol má být vrchol s nejnižším stupněm, snadno nahlédneme, že dalším přesunem hran už nedostaneme jiná řešení.

5. a) Úloha je variantou „šatnářky“. K řešení použijeme princip inkluze a exkluze. Dostáváme součet

$$\binom{n}{0} n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)! =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}(n-1)!$$

Přitom i-tý sčítanec odpovídá odhadu počtu permutací s i pevnými body (ty se vybírají kombinačním číslem a zbylé libovolně permutujeme).

b) Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ má všechny hrany mezi m-prvkovou „levou“ podmnožinou vrcholů a jejím n-prvkovým „pravým“ doplňkem. Poněvadž žádný vrchol se nemůže účastnit více než jedné hrany párování, budou v maximálním párování zastoupeny všechny prvky menší z podmnožin a do páru k nim vybrány libovolné ale různé prvky větší z podmnožin. Budeme tedy počítat variace. Pro $m \leq n$ dostáváme $n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$, pro $n \leq m$ by to bylo analogicky $\frac{m!}{(m-n)!}$.