Domácí úloha z 13. října 2016 (odevzdává se 20. října 2016)

1. Nechť B je množina všech posloupností, jejichž všechny prvky leží v množině $\{0,1\}$, uspořádaná obvyklým způsobem, tj. pro libovolné posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in B$ platí

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \leq (y_n)_{n=1}^{\infty} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall n \in \mathbb{N}:\, x_n \leq y_n.$$

(Snadno si rozmyslíte, že $(B, \leq)$ je svaz izomorfní se svazem všech podmnožin množiny $\mathbb{N}$, je to tedy Booleova algebra.)

Nechť P je podmnožina všech posloupností z B, které jsou periodické. Dokažte, že $(P, \leq)$ je spočetná Booleova algebra, která nemá žádný atom.

(Platí dokonce, že až na izomorfismus je to jediná bezatomární spočetná Booleova algebra, to však dokazovat nemusíte.)

2. Nechť I, J jsou ideály komutativního okruhu R. Označme S množinu všech součinů prvků ideálu I s prvky ideálu J, tj.

$$S = \{a \cdot b;\ a \in I,\, b \in J\}.$$

   (a) Dokažte, že je-li alespoň jeden z ideálů I, J hlavní, pak S je ideálem okruhu R.

   (b) Nalezněte příklad ukazující, že S vždy být ideálem okruhu R nemusí.