Domácí úloha z 10. listopadu 2016 (odevzdává se 24. listopadu 2016)

1. Nalezněte rozkladové těleso K polynomu $f = x^6 - 6 \in \mathbb{Q}[x]$ nad $\mathbb{Q}$ a určete stupeň $[K : \mathbb{Q}]$.
2. Nalezněte rozkladové těleso F polynomu $f = x^5 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ nad $\mathbb{Z}_2$ a určete stupeň $[F : \mathbb{Z}_2]$.
3. Polynom $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$ má kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost). Nalezněte normovaný kubický polynom $g(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ mající kořeny

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4),\\ \beta_2 &= (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4),\\ \beta_3 &= (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3),\end{aligned}$$

tj. vyjádřete koeficienty A, B, C pomocí koeficientů a, b, c, d.

Poznámky k zadání:

U prvních dvou úloh nezapomeňte zdůvodnit, proč je nalezené těleso skutečně hledané rozkladové těleso a proč je stupeň takový, jaký tvrdíte.

Postup popsaný ve třetí úloze umožňuje řešit polynomiální rovnice 4. stupně, umíme-li řešit polynomiální rovnice 3. stupně (na což máme Cardanovy vzorce). Substitucí $y = x + \frac{a}{4}$ převedeme daný polynom do tvaru, kdy je koeficient u y^3 nulový. Bez újmy na obecnosti tedy lze předpokládat, že pro daný polynom f platí $a = 0$. Pak kořeny vzniklého kubického polynomu $g(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ splňují

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) = -(\alpha_1 + \alpha_2)^2,\\ \beta_2 &= (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4) = -(\alpha_1 + \alpha_3)^2,\\ \beta_3 &= (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3) = -(\alpha_1 + \alpha_4)^2,\end{aligned}$$

neboť $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$. Vypočteme-li $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, dostaneme

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 &= \pm\sqrt{-\beta_1},\\ \alpha_1 + \alpha_3 &= \pm\sqrt{-\beta_2},\\ \alpha_1 + \alpha_4 &= \pm\sqrt{-\beta_3},\end{aligned}$$

odkud snadno dopočítáme všechny kořeny původního polynomu f, například $2\alpha_1 = (\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_1+\alpha_3)+(\alpha_1+\alpha_4)$, $2\alpha_2 = (\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_1+\alpha_3)-(\alpha_1+\alpha_4)$ atd.]