Domácí úkol z prvního cvičení

Příklad 1. *Nalezněte matici přechodu od báze $\mathcal{U}$ k bázi $\mathcal{V}$, je-li:*

- $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{u}_1; \boldsymbol{u}_2; \boldsymbol{u}_3\} = \{(2,1,0); (0,3,5); (5,-10,6)\}$
- $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1; \boldsymbol{v}_2; \boldsymbol{v}_3\} = \{(2,-5,-10); (-6,25,-7); (19,-28,18)\}$

Řešení. Ukážeme dva různé postupy řešení, nejprve z definice matice přechodu, pak přechodem přes standardní bázi (preferovanější).

1. Z definice matice přechodu hledáme koeficienty $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$ takové, že bude splněna soustava rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_2 &= d\mathbf{u}_1 + e\mathbf{u}_2 + f\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_3 &= g\mathbf{u}_1 + h\mathbf{u}_2 + i\mathbf{u}_3 \end{aligned} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{aligned} (2,-5,-10) &= a(2,1,0) + b(0,3,5) + c(5,-10,6) \\ (-6,25,-7) &= d(2,1,0) + e(0,3,5) + f(5,-10,6) \\ (19,-28,18) &= g(2,1,0) + h(0,3,5) + i(5,-10,6) \end{aligned}$$

Rozepsáním rovnic získáme tři soustavy rovnic, kde má každá soustava tři rovnice a tři neznámé.

$$\begin{aligned} 2 &= 2a + 5c \\ -5 &= a + 3b - 10c \\ -10 &= + 5b + 6c \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -6 &= 2d + 5f \\ 25 &= d + 3e - 10f \\ -7 &= + 5e + 6f \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 19 &= 2g + 5i \\ -28 &= g + 3h - 10i \\ 18 &= + 5h + 6i \end{aligned}$$

Je vidět, že se prakticky jedná o jednu soustavu s odlišnými absolutními členy a jiným označením neznámých. Proto můžeme řešit všechny tři soustavy naráz úpravou levého bloku následující matice na schodovitý tvar, popř. až na jednotkovou matici:

$$\left(\begin{array}{ccc||c|c|c} 2 & 0 & 5 & 2 & -6 & 19 \\ 1 & 3 & -10 & -5 & 25 & -28 \\ 0 & 5 & 6 & -10 & -7 & 18 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc||c|c|c} 1 & 3 & -10 & -5 & 25 & -28 \\ 0 & 5 & 6 & -10 & -7 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \cdots$$

$$\cdots \sim \left(\begin{array}{ccc||c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Pravý blok upravené matice (oddělený dvojitou čarou) je zřejmě hledanou maticí přechodu od báze $\mathcal{U}$ k bázi $\mathcal{V}$, neboť se vlastně jedná o matici řešení soustav ve tvaru:

$$\left(\begin{array}{ccc||c|c|c} 1 & 0 & 0 & a & d & g \\ 0 & 1 & 0 & b & e & h \\ 0 & 0 & 1 & c & f & i \end{array}\right), \text{(pokud nedošlo k výměně sloupců!)}$$

Hledaná matice přechodu je tedy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Naším úkolem bude najít matici A tak, aby platilo

$$(x)_{\mathcal{U}} = A \cdot (x)_{\mathcal{V}} \tag{1}$$

Místo abychom určovali přímo matici A, zkusíme určit nejdříve matice přechodu ze standardní báze $\mathcal{E}$ do $\mathcal{U}$, resp. $\mathcal{V}$. Hledáme proto matice B, C takové, že bude platit

$$(x)_{\mathcal{E}} = B \cdot (x)_{\mathcal{U}} \tag{2}$$
$$(x)_{\mathcal{E}} = C \cdot (x)_{\mathcal{V}} \tag{3}$$

Určíme matice B, C. Když např. do $(\mathbf{x})_{\mathcal{U}}$ dosadíme postupně souřadnice vektorů $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ (toto jsou vlastně souřadnice vektorů báze $\mathcal{U}$ vzhledem k bázi $\mathcal{U}$!), musíme na levé straně postupně dostat souřadnice bázových vektorů z $\mathcal{U}$ vzhledem ke standardní bázi $\mathcal{E}$. Tyto souřadnice tedy musí být v matici B postupně ve sloupcích. Obdobnou úvahou pro matici C získáme podobu jednotlivých matic (ověřte si, že skutečně po dosazení vektorů $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ za $(x)_{\mathcal{U}}$ do obou rovnic dostaneme skutečně souřadnice bázových vektorů $\mathcal{U}$, resp. $\mathcal{V}$ vzhledem k $\mathcal{E}$!):

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -10 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 19 \\ -5 & 25 & -28 \\ -10 & -7 & 18 \end{pmatrix}$$

Porovnáním maticových rovnic (2) a (3) dostáváme rovnost, kterou dále upravíme na hledaný tvar ve vyjádření (1):

$$\begin{aligned} B \cdot (X)_{\mathcal{U}} &= C \cdot (X)_{\mathcal{V}} \\ (X)_{\mathcal{U}} &= \underbrace{(B^{-1} \cdot C)}_{A} \cdot (X)_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

Konkrétní tvar matice A dostaneme např. tak, že vedle sebe postupně napíšeme do oddělených bloků matice B a C, následně pak upravíme blok matice B na jednotkovou matici – v pravém bloku pak dostaneme matici $A = B^{-1} \cdot C$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 5 & 2 & -6 & 19 \\ 1 & 3 & -10 & -5 & 25 & -28 \\ 0 & 5 & 6 & -10 & -7 & 18 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -10 & -5 & 25 & -28 \\ 0 & 5 & 6 & -10 & -7 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \cdots$$

$$\cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

(Všimněte si, že předchozí úpravy matic jsou stejné jako v prvním způsobu řešení. Algoritmicky se dá popis hledání matice přechodu popsat jednoduše – vektory první báze umístíme do sloupců v levém bloku, vektory druhé báze do pravého bloku, upravíme levý blok na jednotkovou matici a v pravém bloku dostaneme hledanou matici přechodu. Odvození tohoto algoritmu se však v obou způsobech liší.)

Hledaná matice přechodu je tedy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.