Domácí úkol z třetího cvičení

Příklad 3. ***Skripta, příklad 22a, 22d na straně 120.*** *V $\mathcal{A}_5$ je dán podprostor $\mathcal{B}_1$ (resp. $\mathcal{B}_2$). Je-li dán parametricky (resp. neparametricky), najděte jeho neparametrické (resp. parametrické) vyjádření:*

(a) $\mathcal{B}_1 : X = [2, 1, -3, 3, 1] + r(1, 1, 2, 1, 3) + s(1, 2, 1, 3, 1)$;

(d) $\mathcal{B}_2 : 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2; \qquad 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 1.$

Řešení. (a) Protože popisovaný podprostor je dimenze 2 (má dva směrové vektory), hledáme soustavu (přesněji řečeno její koeficienty) tří rovnic o pěti neznámých, jejíž řešením je dané parametrické vyjádření.

$$\begin{aligned} 0 &= a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1x_4 + e_1x_5 + f_1 \\ 0 &= a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4 + e_2x_5 + f_2 \\ 0 &= a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 + d_3x_4 + e_3x_5 + f_3 \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Směrové vektory podprostoru $\mathcal{B}_1$ musí být řešením zhomogenizované soustavy k soustavě ($\star$) (tj. soustavy ($\star$) bez absolutních členů f_1, f_2 a f_3) – pro koeficienty a, b, c, d, e libovolné rovnice soustavy ($\star$) tedy musí platit následující:

$$\begin{aligned} 0 &= a + b \;\; + 2c + d \;\; + 3e \\ 0 &= a + 2b + c \;\; + 3d + e \end{aligned}$$

(Koeficienty této soustavy tvoří samozřejmě souřadnice směrových vektorů.)

Řešením této soustavy dostáváme nekonečně mnoho různých řešení – z nich vybereme tři libovolné nezávislé (např. zvolením jednoho parametru jako 1 a ostatních jako nula).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} a &= -3t + u - 5v \\ b &= t - 2u + 2v \\ c &= t \\ d &= u \\ e &= v \end{aligned} \quad \Longrightarrow \begin{aligned} (a_1, b_1, c_1, d_1, e_1) &= (-3, 1, 1, 0, 0) \\ (a_2, b_2, c_2, d_2, e_2) &= (1, -2, 0, 1, 0) \\ (a_3, b_3, c_3, d_3, e_3) &= (-5, 2, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Výsledky doplníme do soustavy ($\star$):

$$\begin{aligned} 0 &= -3x_1 + x_2 \;\; + x_3 \qquad\qquad\quad + f_1 \\ 0 &= x_1 \quad - 2x_2 \qquad\quad + x_4 \qquad + f_2 \\ 0 &= -5x_1 + 2x_2 \qquad\qquad\quad + x_5 + f_3 \end{aligned}$$

Zbývá dopočítat absolutní členy rovnic f_1, f_2, f_3 – ty zjistíme dosazením souřadnic bodu v parametrickém vyjádření $\mathcal{B}_1$ do soustavy ($\star$).

$$\begin{aligned}
0 &= -3\cdot 2 + 1 - 3 + f_1\\
0 &= 2 - 2\cdot 1 + 3 + f_2\\
0 &= -5\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1 + f_3
\end{aligned}$$

Výsledné neparametrické vyjádření podprostoru $\mathcal{B}_1$ je tedy:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 : -3x_1 + x_2 + x_3 + 8 &= 0\\
x_1 - 2x_2 + x_4 - 3 &= 0\\
-5x_1 + 2x_2 + x_5 + 7 &= 0
\end{aligned}$$

(Doporučuji udělat zkoušku – bod ze zadání dosadíme do výsledných rovnic a směrové vektory ze zadání dosadíme do zhomogenizovaných výsledných rovnic.)

(d) Přechod od neparametrického vyjádření k parametrickému je podstatně jednodušší – prostým vyřešením soustavy rovnic (předem si povšimneme, že $\dim \mathcal{B}_2 = 3$, neboť jsou v parametrickém vyjádření dvě rovnice a pohybujeme se v $\mathcal{A}_5$, proto $\dim \mathcal{B}_2 = \dim \mathcal{A}_5 - 2 = 3$).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 3 & -1 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{aligned} x_1 &= -1 + t\\ x_2 &= t\\ x_3 &= u\\ x_4 &= -4 + 6t + 3u + 2v\\ x_5 &= v \end{aligned}$$

Souřadnice prvního směrového vektoru pak tvoří koeficienty vystupující u parametru t (tedy vektor $(1,1,0,6,0)$), souřadnice druhého směrového vektoru tvoří koeficienty vystupující u parametru u (tedy vektor $(0,0,1,3,0)$) a souřadnice třetího směrového vektoru jsou koeficienty vystupující u parametru v (tedy vektor $(0,0,0,2,1)$). Souřadnice bodu, kterým prochází podprostor $\mathcal{B}_2$, tvoří absolutní členy v řešení soustavy (tedy bod $[-1,0,0,-4,0]$).

Výsledné parametrické vyjádření je tedy:

$$\mathcal{B}_2 : X = [-1,0,0,-4,0] + t(1,1,0,6,0) + u(0,0,1,3,0) + v(0,0,0,2,1)$$

(Doporučuji opět udělat zkoušku – bod z výsledku dosadíme do rovnic ze zadání a směrové vektory z výsledku dosadíme do zhomogenizovaných rovnic ze zadání.)