Domácí úkol ze čtvrtého cvičení

Příklad 4. ***Skripta, příklad 31 na straně 122.*** *Nalezněte parametrické i neparametrické vyjádření součtu a průniku podprostorů $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, kde:*

- $\mathcal{B}_1 : X = A + t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 = [2, 1, 4, 0, 0] + t_1(1, 0, 1, 1, 0) + t_2(0, -1, -1, 2, 1)$;
- $\mathcal{B}_2 : X = B + s_1\boldsymbol{v}_1 + s_2\boldsymbol{v}_2 + s_3\boldsymbol{v}_3 = [3, 0, 1, 3, 2] + s_1(1, 1, 0, 0, 1) + s_2(1, -1, 0, 3, 1) + + s_3(1, 0, -2, 1, 1)$.

Řešení. Algoritmem předvedeným na cvičení:

1. **Převést vyjádření obou podprostorů na parametrické.** Zřejmě splněno.
2. **Upravíme na schodovitý tvar matici, která je složená z vektorů obou zaměření a z vektoru, jehož počáteční bod leží v jednom podprostoru a koncový ve druhém.** Sestavíme tuto matici a dále řešíme. Podle doporučení dáváme podprostor s větší dimenzí jako první.

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & -1 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

3. **Vyjádříme parametricky součet a průnik.** Pro vyjádření součtu stačí vzít libovolný bod libovolného z obou podprostorů, zaměření součtu tvoří vektory z nenulových řádků upravené matice výše (nebo jejich libovolný nenulový násobek). Tedy

$$\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2 = [2, 1, 4, 0, 0]+p_1(1, 1, 0, 0, 1)+p_2(0, -2, 0, 3, 0)+p_3(0, 0, 4, 1, 0)+p_4(0, 0, 0, 3, 4).$$

Pro vyjádření průniku postupujeme takto: protože body v průniku leží jak v $\mathcal{B}_1$, tak současně v $\mathcal{B}_2$, obě parametrická vyjádření můžeme porovnat. Dále vektory převedeme na jednu a body na druhou stranu („odečtením bodů" získáme vektor).

$$\begin{aligned} [2, 1, 4, 0, 0] + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 &= [3, 0, 1, 3, 2] + s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{v}_2 + s_3\mathbf{v}_3 \\ t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 - s_1\mathbf{v}_1 - s_2\mathbf{v}_2 - s_3\mathbf{v}_3 &= (1, -1, -3, 3, 2) \end{aligned}$$

Toto je ovšem soustava pěti rovnic o pěti neznámých, kterou řešíme.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} t_1 = u \\ t_2 = 1 + u \\ s_1 = 0 \\ s_2 = u \\ s_3 = -1 \end{array}$$

Upozornění: výsledek není parametrické vyjádření průniku! Abychom dostali parametrické vyjádření, musíme dosadit řešení do některého z vyjádření $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ (uděláme to pro $\mathcal{B}_1$).

$$[2,1,4,0,0] + u(1,0,1,1,0) + (1+u)(0,-1,-1,2,1) = [2+u, -u, 3, 2+3u, 1+u]$$
$$\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 : X = [2,0,3,2,1] + u(1,-1,0,3,1)$$

4. **Vyjádříme neparametricky součet a průnik.** Převedeme obě dvě získaná parametrická vyjádření podle postupu z minulého domácího úkolu.

$$+ : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} a = 3t \\ b = -6t \\ c = t \\ d = -4t \\ e = 3t \end{matrix} \Longrightarrow (a_1, b_1, c_1, d_1, e_1) = (3, -6, 1, -4, 3)$$

$$\bigcap : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} a = t - 3v - w \\ b = t \\ c = u \\ d = v \\ e = w \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} (a_1, b_1, c_1, d_1, e_1) = (1,1,0,0,0) \\ (a_2, b_2, c_2, d_2, e_2) = (0,0,1,0,0) \\ (a_3, b_3, c_3, d_3, e_3) = (3,0,0,-1,0) \\ (a_4, b_4, c_4, d_4, e_4) = (1,0,0,0,-1) \end{matrix}$$

Z výsledků sestavíme odpovídající soustavy:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 &: 3x_1 - 6x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 + f_1 = 0 \\ \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 &: x_1 + x_2 + f_2 = 0 \\ &\quad + x_3 + f_3 = 0 \\ &\quad 3x_1 - x_4 + f_4 = 0 \\ &\quad x_1 - x_5 + f_5 = 0 \end{aligned}$$

Zbývá dopočítat absolutní členy rovnic f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 – f_1 zjistíme např. dosazením bodu $[2,1,4,0,0]$ (leží v součtu), zbylé členy např. dosazením bodu $[2,0,3,2,1]$. Výsledná neparametrická vyjádření jsou tedy:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 &: 3x_1 - 6x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 - 4 = 0 \\ \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 &: x_1 + x_2 - 2 = 0 \\ &\quad + x_3 - 3 = 0 \\ &\quad 3x_1 - x_4 - 4 = 0 \\ &\quad x_1 - x_5 - 1 = 0 \end{aligned}$$