Domácí úkol z pátého cvičení

Příklad 5. ***Skripta, příklad 57e na straně 127.*** *Vyšetřete vzájemnou polohu podprostorů $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}_5$ a určete jejich průnik. Přitom:*

- $\mathcal{B} : X = [2,0,2,0,1] + r(2,1,0,0,0) + s(0,0,1,2,3)$;
- $\mathcal{C} : X = [1,0,0,1,0] + t(1,0,0,0,0) + q(1,1,0,0,0) + k(1,1,0,0,1)$.

Řešení. Použijeme známý algoritmus:

1. **Převést vyjádření obou podprostorů na parametrické.** Zřejmě splněno.

2. **Upravíme na schodovitý tvar matici, která je složená z vektorů obou zaměření a z vektoru, jehož počáteční bod leží v jednom podprostoru a koncový ve druhém.**

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

3. **Určíme vzájemnou polohu obou podprostorů.** Protože se vektor „pod čarou“ nevynuloval, platí $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Z toho, že „nad čarou“ zůstaly čtyři nevynulované řádky (což není rovno dimenzi většího z obou podprostorů, totiž tři), plyne, že jsou $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ mimoběžné podprostory s jedním společným směrem. Ten dostaneme jako řešení následující vektorové rovnice (podobnou rovnici jsme řešili v minulém domácím úkolu, když jsme chtěli zjistit průnik, tehdy jsme však brali celá parametrická vyjádření, tady bereme jen vektory):

$$r\overbrace{(2,1,0,0,0)}^{\mathbf{b}_1} + s\overbrace{(0,0,1,2,3)}^{\mathbf{b}_2} = t\overbrace{(1,0,0,0,0)}^{\mathbf{c}_1} + q\overbrace{(1,1,0,0,0)}^{\mathbf{c}_2} + k\overbrace{(1,1,0,0,1)}^{\mathbf{c}_3}$$
$$(0,0,0,0,0) = t\cdot\mathbf{c}_1 + q\cdot\mathbf{c}_2 + k\cdot\mathbf{c}_3 - r\cdot\mathbf{b}_1 - s\cdot\mathbf{b}_2$$

Vzniklou homogenní soustavu pěti rovnic o pěti neznámých řešíme.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{l} t = a \\ q = a \\ k = 0 \\ r = a \\ s = 0 \end{array}$$

Abychom dostali hledaný společný směr, musíme řešení dosadit do některé strany výchozí vektorové rovnice. Např. tedy:

$$a(2,1,0,0,0) + 0(0,0,1,2,3) = (2a, a, 0, 0, 0)$$

Závěrem můžeme konstatovat, že podprostory $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ jsou mimoběžné a mají společný jeden směr generovaný vektorem $(2,1,0,0,0)$.