Domácí úkol z desátého cvičení

Příklad 8. ***Skripta, příklad 111 b) na straně 136.*** *Nalezněte ortogonální projekci $\boldsymbol{y}$ a ortogonální komponentu $\boldsymbol{z}$ vektoru $\boldsymbol{x}$ na podprostor $\mathcal{W} = L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$, je-li $\boldsymbol{x} = (14, -3, -6, -7)$, $\boldsymbol{u} = (-3, 0, 7, 6)$, $\boldsymbol{v} = (1, 4, 3, 2)$ a $\boldsymbol{w} = (2, 2, -2, -2)$.*

Řešení. Nejprve vybereme z generátorů podprostoru $\mathcal{W}$ bázi (dosazením souřadnic generátorů do matice a úpravou na schodovitý tvar):

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bázemi $\mathcal{W}$ jsou tedy vektory $\mathbf{u}_1 = (-3, 0, 7, 6)$ a $\mathbf{u}_2 = (0, 3, 4, 3)$. Protože platí (z definice), že $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ a $\mathbf{y} \in \mathcal{W}$ (tedy $\mathbf{y} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2$), dále můžeme psát $\mathbf{x} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \mathbf{z}$. Tuto rovnici vynásobíme skalárně nejprve vektorem $\mathbf{u}_1$ a poté vektorem $\mathbf{u}_2$ (využíváme přitom toho, že tyto vektory jsou kolmé s vektorem $\mathbf{z}$, který patří do $\mathcal{W}^\perp$).

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{x} = k_1 \cdot \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + k_2 \cdot \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{z}$$

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{x} = k_1 \cdot \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 + k_2 \cdot \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{z}$$

Nyní vyčíslíme všechny skalární součiny a rovnici o dvou neznámých k_1 a k_2 vyřešíme.

$$-126 = 94k_1 + 46k_2 + 0$$
$$-54 = 46k_1 + 34k_2 + 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 94 & 46 & -126 \\ 46 & 34 & -54 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 47 & 23 & -63 \\ 23 & 17 & -27 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Tedy platí $\mathbf{y} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 = -\frac{5}{3}\mathbf{u}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{u}_2 = (5, 2, -9, -8)$. Ortogonální komponentu dostáváme jako $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} = (9, -5, 3, 1)$.