Překryvy map

Úloha – nalezení všech průsečíků úseček z množiny S.

S ... množina n úseček v rovině (vstup)

Výstup .... všechny průsečíky, u každého průsečíku budou všechny úsečky, které jím prochází

Počet dvojic je $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$

Triviální algoritmus pracuje v čase $O(n^2)$.

~ úsečka ab .... $x = \lambda a + (1-\lambda) b \quad \lambda \in [0,1]$

úsečka cd $\quad y = \mu c + (1-\mu) d \quad \mu \in [0,1]$

Řešíme soustavu $\lambda a + (1-\lambda) b = \mu c + (1-\mu) d$

$$\lambda a_x + (1-\lambda) b_x = \mu c_x + (1-\mu) d_x$$
$$\lambda a_y + (1-\lambda) b_y = \mu c_y + (1-\mu) d_y$$

$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Průsečík existuje, pokud $\lambda, \mu \in [0, 1]$

Nechť k je počet průsečíků. Náš algoritmus bude pracovat v čase

$$O((n+k)\log n)$$

$k = O(n)$ $\quad O(n \log n) \ll O(n^2)$

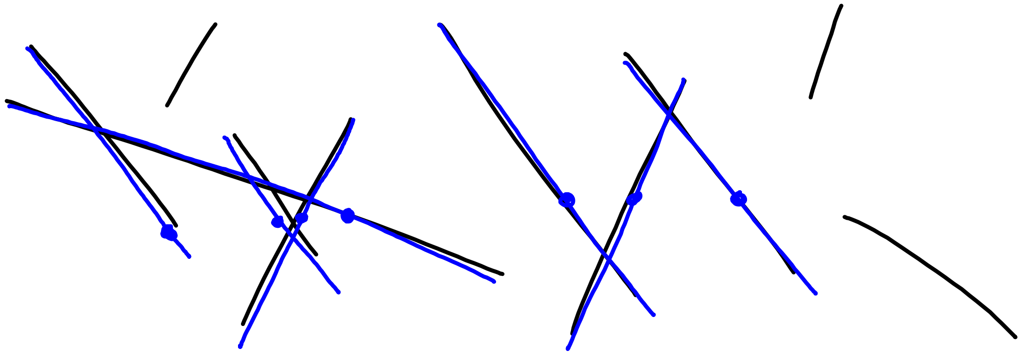
Metoda zametací přímky

přímka

body máme uspořádaní

Rovina, v ní úsečky

Vodorovná přímka (= zametací přímka)



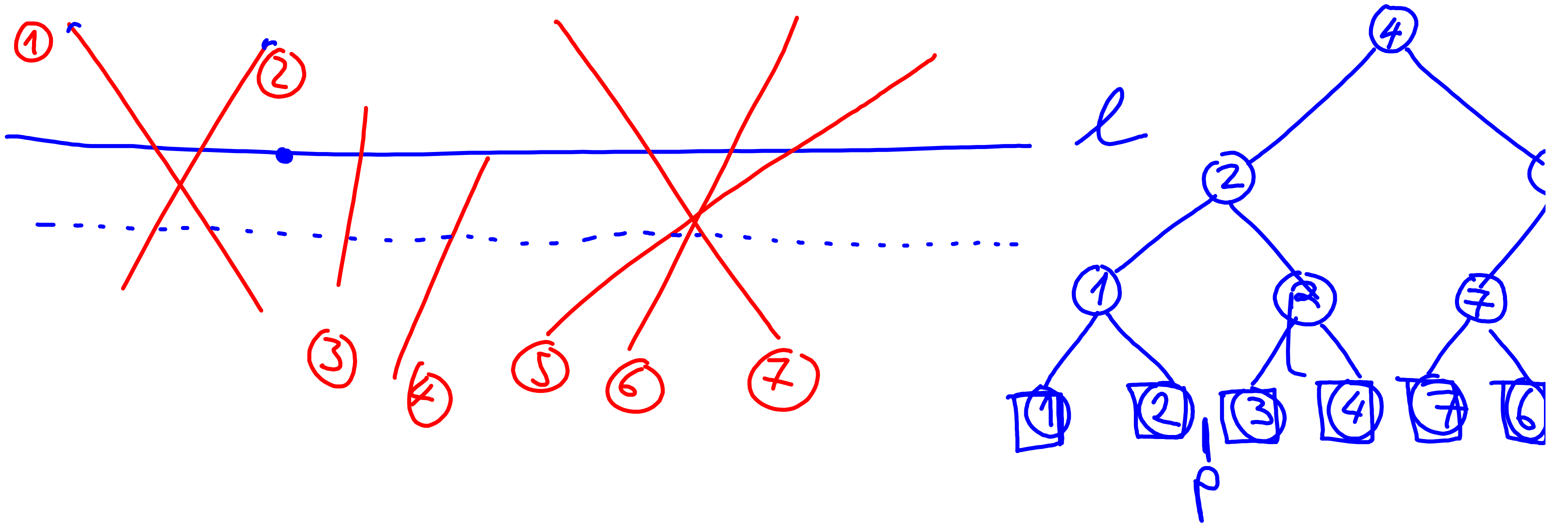
Metoda zametání přímky spočívá v tom, že si představuje vodorovnou přímk
která se „pohybuje" shora dolů. Předpokládáme že úloha je upřesněn
nad přímkou a hledáme průsečíky úseček pod přímkou, a to jinou
průsečíky úseček, které přímku protínají.

Přímka se zastavuje ve významných bodech, tzv. událostech.
V našem případě jsou události všechny koncové body úseček
a již v průběhu algoritmu spočítané průsečíky.
Události řadíme do fronty – fronta se mění podle toho, kterými
událostmi se prošlo a které nové průsečíky jsme spočítali.

V průběhu algoritmu se Q mění.

Binární vyvážený strom T závisí na poloze přímky l.

Je to strom, který poskytuje uspořádání úseček, které protínají přímku a to zleva doprava



Zametací přímka (sweeping line) ℓ

2 struktury fronta událostí Q

b.nární vyhledávací strom $\mathcal{T}$

Uspořádání bodů

$$p < q \iff p_y > q_y \text{ nebo } p_y = q_y \text{ a } p_x < q_x$$

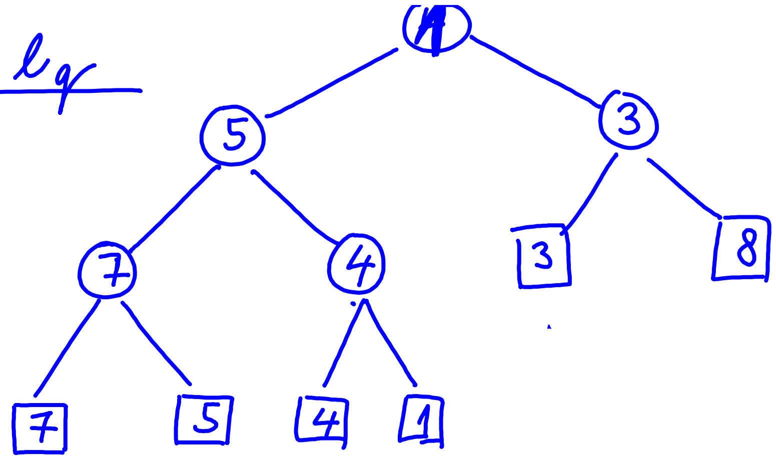
$p \bullet$

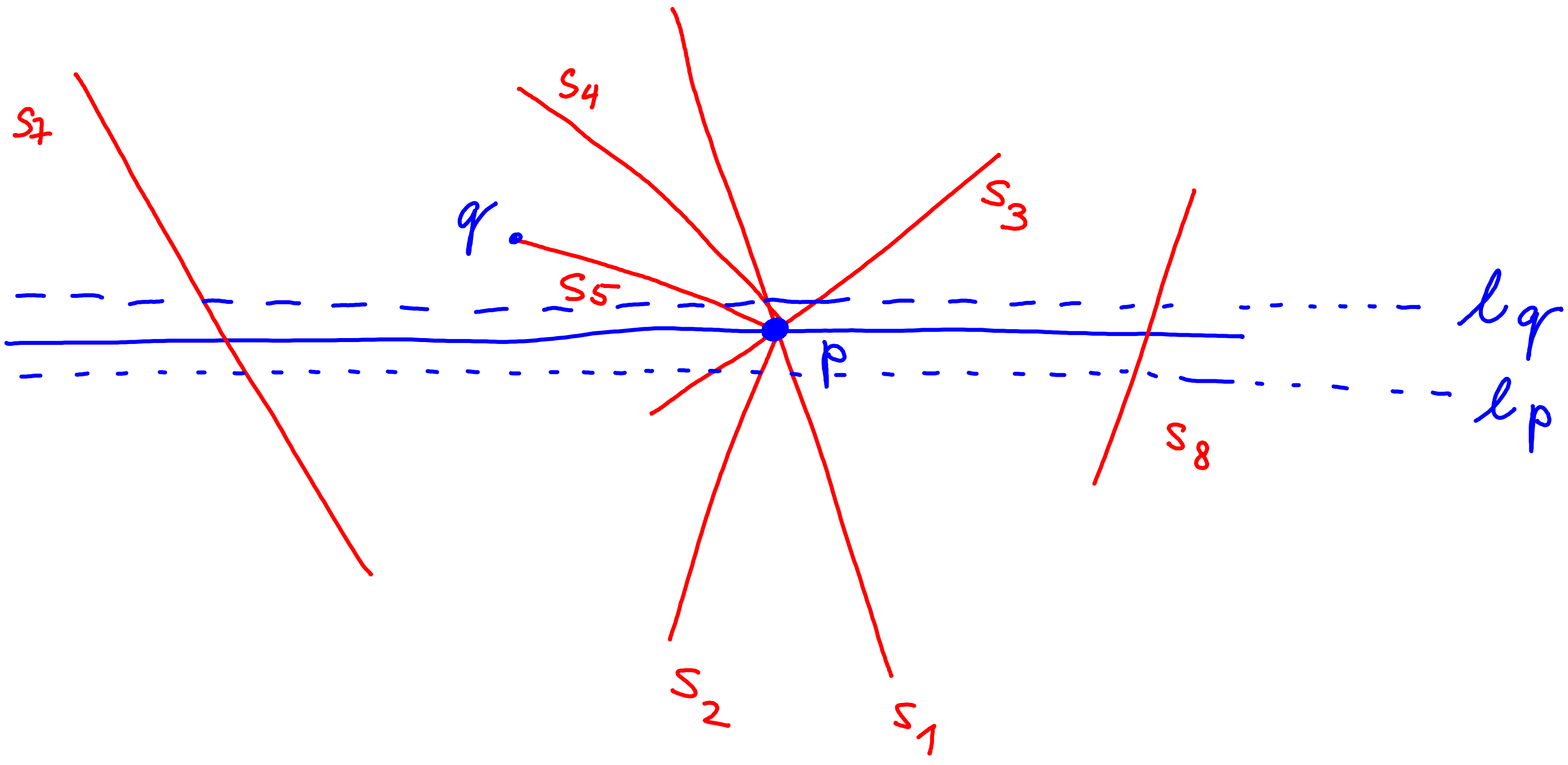
$\bullet q$ $\dot{p}$ $\dot{q}$

Body ve frontě Q jsou uspořádány shora dolů a zleva doprava podle předchozího uspořádání

Na začátku algoritmu obsahuje Q všechny koncové body úseček.

Skew po lgr





s_7
s_4
q
s_3
s_5
ℓ_q
p
ℓ_p
s_8
s_2
s_1

Událost bod p

$L(p)$ .... úsečky , ... do ... p ... je p_1 ...

$C(p)$

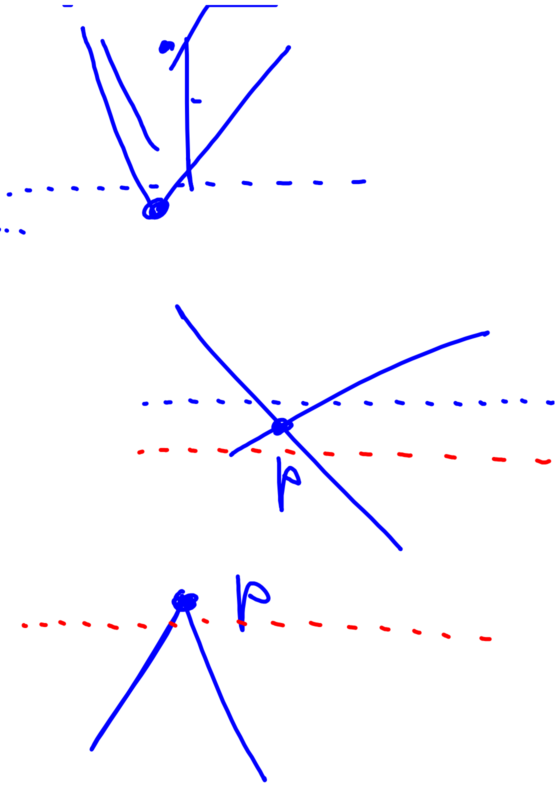
úsečky , kde p je vnitřní bod

$U(p)$ .... úsečky , kde p je horní bod

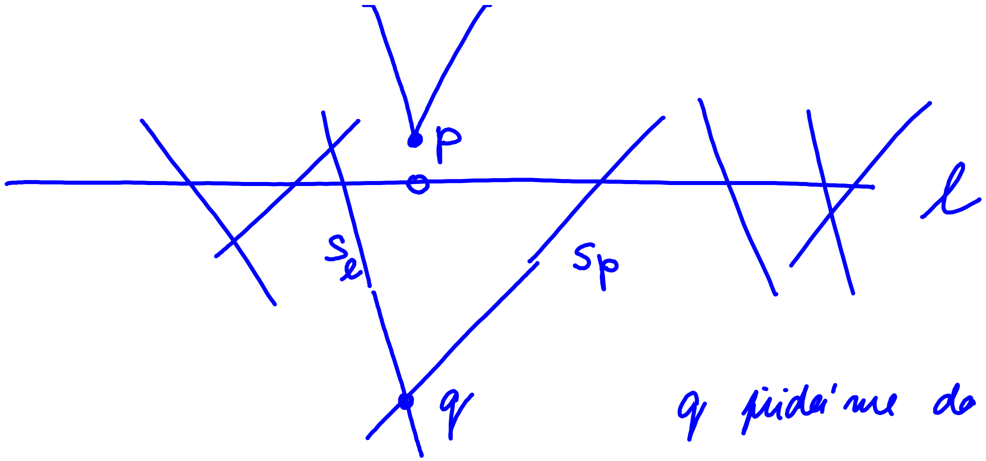
Před událostí p zametací přímka protínala

$L(p) \cup C(p)$

Průchodem události p, přímka přestane protínat $L(p)$
a začne protínat $U(p)$

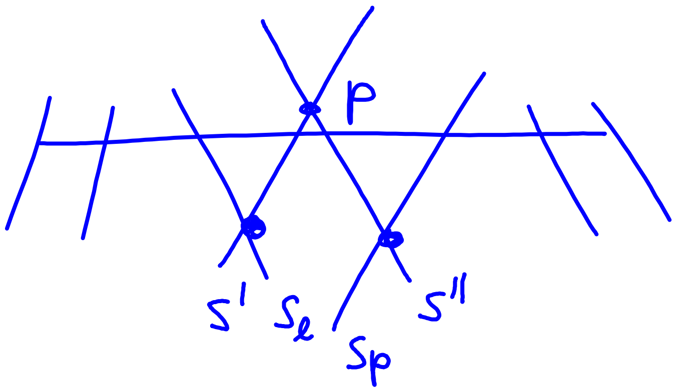


$$C(p) \cup U(p) = \emptyset$$



q pridáme do Q

$$C(p) \cup U(p) \neq \emptyset$$

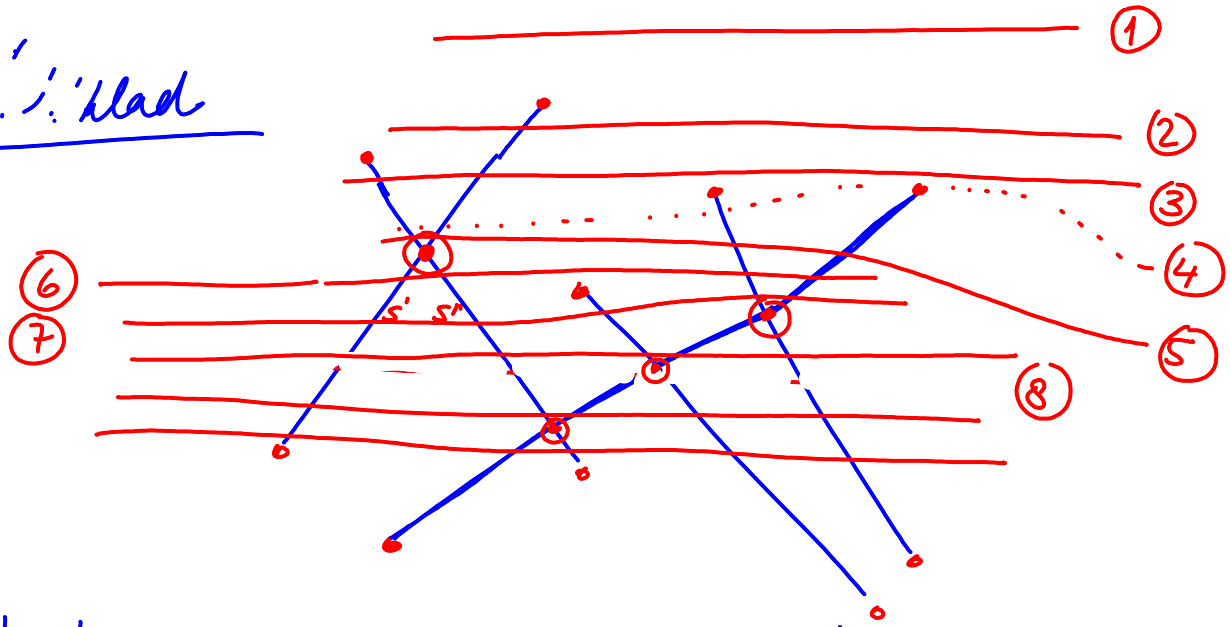


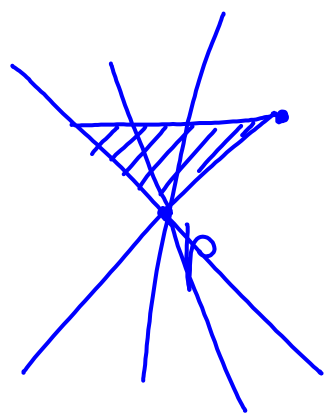
Zjišťujeme průsečíky

$s' \cap s_\ell$

$s'' \cap s_p$

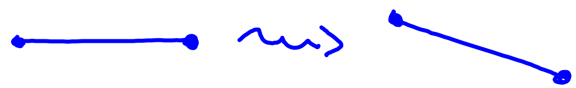
Příklad





Věta: Algoritmus je korektní.

Každý průsečík je spočítán v některé z předchozích událostí.



Časová náročnost algoritmu je $O\big((n+k)\log n\big)$, kde n je počet úseček a k počet průsečíků.

Vytvoření fronty Q ..... $O(n \log n)$

Pracujeme s událostí p .... $|L(p) \cup C(p) \cup U(p)| = m(p)$ počet prvků

Časová náročnost operací je $m(p) \log n$

Časová náročnost algoritmu je

$$O\Big(n \log n + \sum_{p \text{ konc. bod nebo průsečík}} m(p) \cdot \log n\Big)$$

Chceme dokázat, že

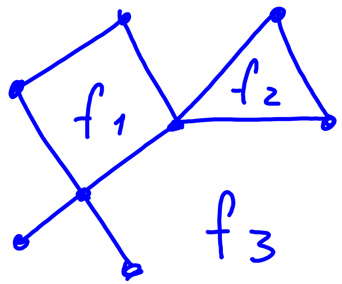
$$m = \sum m(p) = O(n+k)$$

Z teorie grafů potřebujeme: planární grafy

vrcholy n_v počet vrcholů

hrany n_e počet hran

oblasti n_f počet oblastí

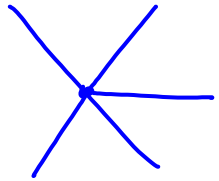


Stupeň vrcholu d_v .. počet hran vycházejících z vrcholu

$$\sum d_v = 2 n_e$$

Pokažimo, da $\sum m(p) = O(n+k)$

$m(p) \le d_p$



$\sum m(p) \le \sum d_v = 2 n_e$, $n_v = 2n + k$

$2 \le n_v - n_e + n_f \le n_v - n_e + \frac{2}{3} n_e = n_v - \frac{1}{3} n_e$

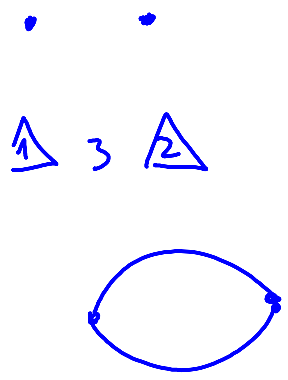
$\frac{1}{3} n_e \le n_v - 2 = 2n + k - 2 \quad / 6$

$\underset{\overset{\vee|}{\sum m(p)}}{2 n_e} \le 12n + 6k - 12 = O(n+k)$

Eulerova věta   Pro planární graf platí

$$n_v - n_e + n_f \geq 2.$$

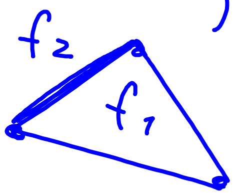
$$6 - 6 + 1$$



Rovnost nastane právě když je graf souvislý.

V našem případě vytváří množina úseček se svými vrcholy a průsečíky rovinný graf

Obrázek



$$\boxed{n_f \leq \frac{2n_e}{3}}$$