5 Pravděpodobnostní funkce, hustoty a distribuční funkce, výpočet pravděpodobností pomocí distribučních funkcí

5.1 Binomické rozdělení $\mathrm{Bin}(n, \theta)$

Náhodná veličina X udává počet úspěchů v posloupnosti n nezávislých opakovaných pokusů, přičemž pravděpodobnost úspěchu v každém pokusu je vyjádřena pomocí parametru θ. Píšeme $X \sim \mathrm{Bin}(n, \theta)$.

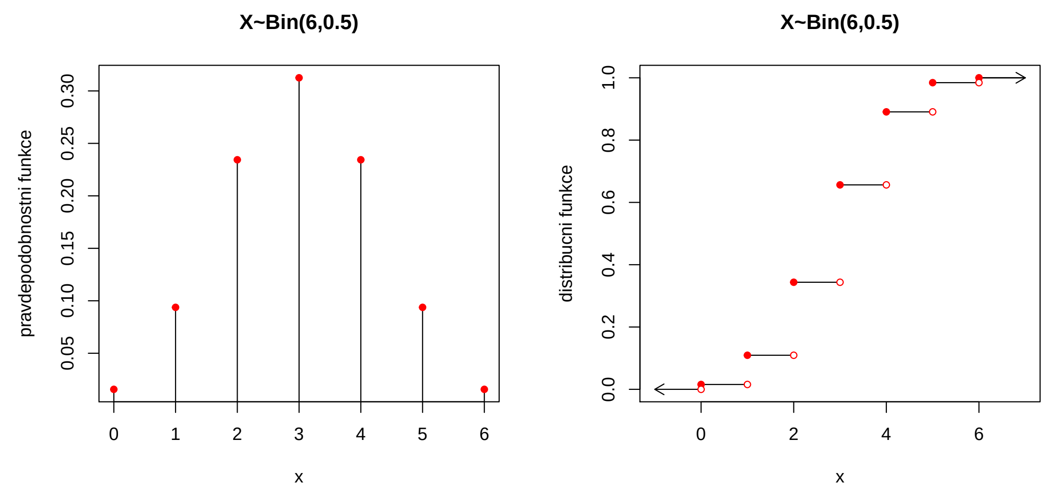
Pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení má tvar

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} & \text{pro } x = 0, \dots, n; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (1)$$

Distribuční funkce binomického rozdělení má tvar

$$F(x) = \sum_{t=0}^{x} \binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t}. \quad (2)$$

Příklad 5.1. Nakreslete graf pravděpodobnostní funkce a distribuční funkce náhodné veličiny $X \sim \mathrm{Bin}(6, 0.5)$.



Analogickým způsobem můžeme získat grafy pravděpodobnostních distribučních funkcí binomického rozdělení pro různá n a θ a sledovat vliv těchto parametrů na vzhled grafů.

5.2 Poissonovo rozdělení $\mathrm{Po}(\lambda)$

Náhodná veličina X udává počet událostí, které nastanou v jednotkovém časovém intervalu (resp. v jednotkové oblasti), přičemž k událostem dochází náhodně, jednotlivě a vzájemně nezávisle. Parametr $\lambda > 0$ je střední počet těchto událostí. Píšeme $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$.

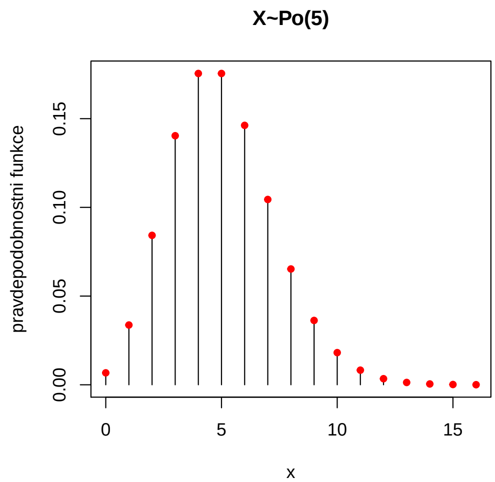
Pravděpodobnostní funkce Poissonova rozdělení má tvar

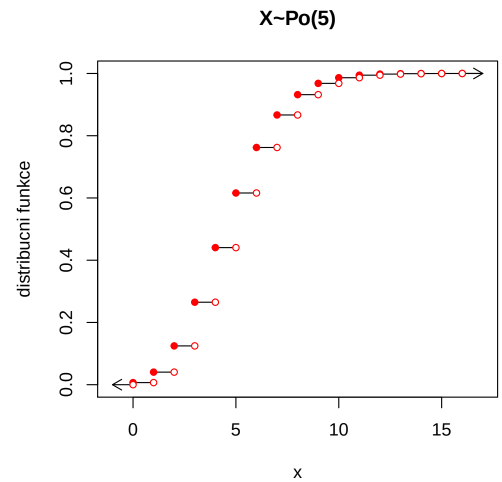
$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} & \text{pro x=0,1,\dots;} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3)$$

Distribuční funkce Poissonova rozdělení má tvar

$$F(x) = \sum_{t=0}^{x} \frac{\lambda^t}{t!}e^{-\lambda}. \quad (4)$$

Příklad 5.2. Nakreslete graf pravděpodobnostní funkce a distribuční funkce náhodné veličiny $X \sim \text{Po}(5)$.





Příklad 5.3. Při provozu balicího automatu vznikají během směny náhodné poruchy, které se řídí rozdělením Po(2). Jaká je pravděpodobnost, že během směny dojde k alespoň jedné poruše?

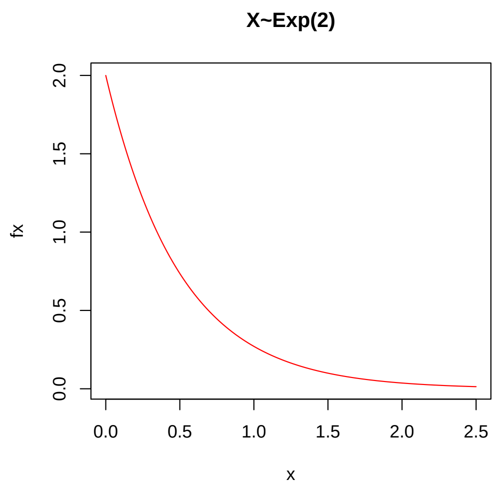
```
## [1] 0.8646647
```

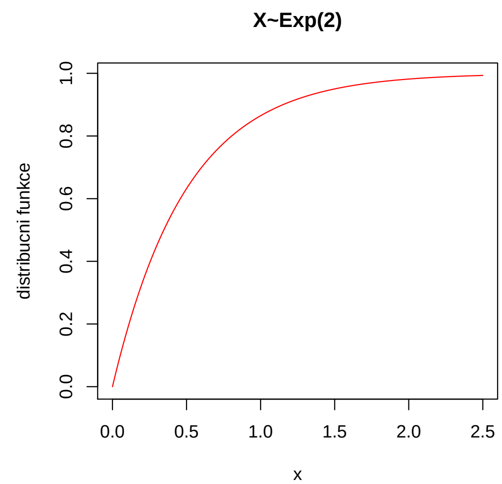
5.3 Exponenciální rozdělení $\text{Exp}(\lambda)$

Náhodná veličina X udává dobu čekání na příchod nějaké události, která se může dostavit každým okamžikem se stejnou šancí bez ohledu na dosud pročekanou dobu. (Jde o tzv. čekání bez paměti.) Přitom $\frac{1}{\lambda}$vyjadřuje střední dobu čekání. Náhodná veličina $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x\lambda} & \text{pro } x > 0; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{5}$$

Příklad 5.4. Nakreslete graf hustoty a distribuční funkce náhodné veličiny $X \sim \text{Exp}(2)$.





Příklad 5.5. Doba do ukončení opravy v opravně obuvi je náhodná veličina, která se řídí exponenciálním rozdělením se střední dobou opravy 3 dny. Jaká je pravděpodobnost, že oprava bude ukončena do dvou dnů?

```
## [1] 0.4865829
```

Příklad 5.6. Doba (v hodinách), která uplyne mezi dvěma naléhavými příjmy v jisté nemocnici, se řídí exponenciálním rozložením se střední dobou čekání 2 h. Jaká je pravděpodobnost, že uplyne více než 5 h bez naléhavého příjmu?

```
## [1] 0.082085
```

5.4 Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

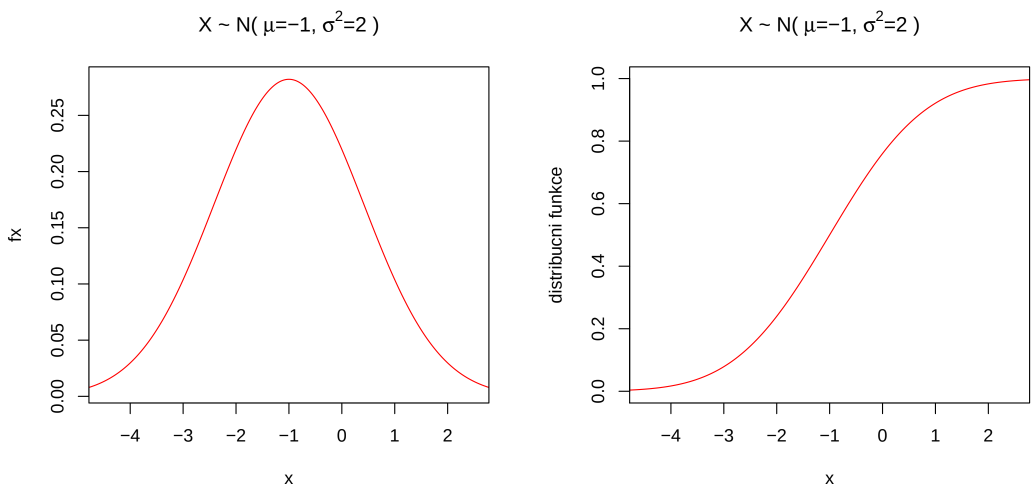
Náhodná veličina $X \sim (\mu, \sigma^2)$ má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{6}$$

Pro $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ se jedná o standardizované normální rozdělení, píšeme $U \sim \mathrm{N}(0, 1)$. Hustota pravděpodobnosti má v tomto případě tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}. \tag{7}$$

Příklad 5.7. Nakreslete graf hustoty a distribuční funkce náhodné veličiny $X \sim N(-1, 2)$.



Příklad 5.8. Výsledky u přijímacích zkoušek na jistou VŠ jsou normálně rozloženy s parametry $\mu = 550$ bodů, $\sigma = 100$ bodů. S jakou pravděpodobností bude mít náhodně vybraný uchazeč alespoň 600 bodů?

```
## [1] 0.3085375
## [1] 0.3085375
```

Příklad 5.9. Životnost baterie v hodinách je náhodná veličina, která má normální rozdělení se střední hodnotou 300 hodin a směrodatnou odchylkou 35 hodin. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná baterie bude mít životnost

a) alespoň 320 hodin?

b) nejvýše 310 hodin?

a)
```
## [1] 0.2838546
```

b)
```
## [1] 0.6124515
```

Příklad 5.10. Na výrobní lince jsou automaticky baleny balíčky rýže o deklarované hmotnosti 1000 g. Působením náhodných vlivů hmotnost balíčků kolísá. Lze ji považovat za náhodnou veličinu, která se řídí normálním rozdělením se střední hodnotou 996 g a směrodatnou odchylkou 18 g. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný balíček rýže neprojde výstupní kontrolou, jestliže je povolená tolerance ± 30 g od deklarované hmotnosti 1000 g?

```
## [1] 0.1037604
```

Příklad 5.11. Nakreslete graf hustoty dvourozměrného standardizovaného normálního rozložení.