9 Parametrické úlohy o dvou nezávislých náhodných výběrech z normálních rozdělení a jednom náhodném výběru z alternativního rozdělení

9.1 Testy o dvou nezávislých náhodných výběrech

Nechť $X_{11} \dots X_{1n_1}$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_{21} \dots X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$ a $n_2 \geq 2$. Označme M_1, M_2 výběrové průměry a S_1^2, S_2^2 výběrové rozptyly a

$$S_*^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

je vážený průměr výběrových rozptylů.

1. Pivotová statistika
$$U = \frac{(M_1-M_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$
slouží k řešení úloh o $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2 a σ_2^2 známe.

2. Pokud $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak pivotová statistika
$$T = \frac{(M_1-M_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_*\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$
slouží k řešení úloh o $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2, σ_2^2 neznáme, ale víme, že jsou shodné.

3. Pokud $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak pivotová statistika
$$K = \frac{(n_1+n_2-2)S_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1+n_2-2)$$
slouží k řešení úloh o neznámém společném rozptylu σ^2.

4. Pivotová statistika
$$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$
slouží k řešení úloh o $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.

Dvouvýběrové testy - Kritické obory

1. Nechť $X_{11}, \dots X_{1n_1}$ je náhodný výběr z $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, a $X_{21}, \dots X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$ a σ_1^2, σ_2^2 známe. Nechť c je konstanta.

    - Testujeme $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = c$ oproti $H_{11} : \mu_1 - \mu_2 \neq c$, případně $H_{12} : \mu_1 - \mu_2 < c$, či $H_{13} : \mu_1 - \mu_2 > c$.
    - Takovýto test se nazývá *dvouvýběrový z-test*
    - Realizace testové statistiky:
    $$t_0 = \frac{(m_1 - m_2) - c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$
    - kritický obor pro oboustrannou alternativu H_{11}: $W = (-\infty; u_{\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$
    - kritický obor pro levostrannou alternativu H_{12}: $W = (-\infty; u_\alpha\rangle$
    - kritický obor pro pravostrannou alternativu H_{13}: $W = \langle u_{1-\alpha}; \infty)$

    u_α je α kvantil standardizovaného normálního rozdělení ... `qnorm(alpha,0,1)`.

2. Nechť $X_{11}, \dots X_{1n_1}$ je náhodný výběr z $N(\mu_1, \sigma^2)$, a $X_{21}, \dots X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_2, \sigma^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$ a σ^2 neznáme. Nechť c je konstanta.

    - Testujeme $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = c$ oproti $H_{11} : \mu_1 - \mu_2 \neq c$, případně $H_{12} : \mu_1 - \mu_2 < c$, či $H_{13} : \mu_1 - \mu_2 > c$.
    - Takovýto test se nazývá *dvouvýběrový t-test*
    - Realizace testové statistiky:
    $$t_0 = \frac{(m_1 - m_2) - c}{s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}.$$
    - kritický obor pro oboustrannou alternativu H_{11}: $W = (-\infty; t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\rangle \cup \langle t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2), \infty)$
    - kritický obor pro levostrannou alternativu H_{12}: $W = (-\infty; t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)\rangle$
    - kritický obor pro pravostrannou alternativu H_{13}: $W = \langle t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2); \infty)$

    $t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$ je α kvantil Studentova rozdělení o $n_1 + n_2 - 2$ stupních volnosti ... `qt(alpha,n1+n2-2)`.

3. -

4. Nechť $X_{11}, \dots X_{1n_1}$ je náhodný výběr z $N(\mu_1, \sigma^2)$, a $X_{21}, \dots X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_2, \sigma^2)$, přičemž $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$.

    - Testujeme $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ oproti $H_{11} : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$, případně $H_{12} : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$ či $H_{13} : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$.
    - Takovýto test se nazývá *F-test.*
    - Realizace testové statistiky:
    $$t_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$
    - kritický obor pro oboustrannou alternativu H_{11}: $W = (0; F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)\rangle \cup \langle F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1), \infty)$
    - kritický obor pro levostrannou alternativu H_{12}: $W = (0; F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)\rangle$
    - kritický obor pro pravostrannou alternativu H_{13}: $W = \langle F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1); \infty)$

    $F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$ je α kvantil Fisher-Snedecorova rozdělení o $n_1 - 1$ a $n_2 - 1$ stupních volnosti ... `qf(alpha,n1-1,n2-1)`.

Intervaly spolehlivosti

1. IS pro $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2,σ_2^2 známe (využití statistiky U)

   (a) Oboustranný IS (d, h):

$$\left(m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} u_{1-\alpha/2}\,;\, m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} u_{\alpha/2}\right)$$

   (b) Levostranný IS $(d; \infty)$:

$$\left(m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} u_{1-\alpha}; \infty\right)$$

   (c) Pravostranný IS $(-\infty; h)$:

$$\left(-\infty; m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} u_{\alpha}\right)$$

   u_α je α kvantil standardizovaného normálního rozdělení . . . qnorm(alpha,0,1).

2. IS pro $\mu_1 - \mu_2$, když σ_1^2,σ_2^2 neznáme, ale víme, že jsou shodné (využití statistiky T)

   (a) Oboustranný IS (d, h):

$$\left(m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\,;\, m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\right)$$

   (b) Levostranný IS $(d; \infty)$:

$$\left(m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)\,;\, \infty\right)$$

   (c) Pravostranný IS $(-\infty; h)$:

$$\left(-\infty\,;\, m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)\right)$$

   $t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$ je α kvantil Studentova rozdělení o $n_1 + n_2 - 2$ stupních volnosti . . . qt(alpha,n1+n2-2).

3. IS pro společný neznámý rozptyl σ^2 (využití pivotové statistiky K)

   (a) Oboustranný IS (d, h):

$$\left(\frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)}\,;\, \frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)}\right)$$

   (b) Levostranný IS (d, ∞)

$$\left(\frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)}\,;\, \infty\right)$$

   (c) Pravostranný IS $(-\infty; h)$

$$\left(-\infty\,;\, \frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)}\right)$$

   $\chi^2_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$ je α kvantil χ^2 rozdělení o $n_1 + n_2 - 2$ stupních volnosti . . . qchisq(alpha,n1+n2-2).

4. IS pro podíl rozptylů $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ (využití pivotové statistiky F)

   (a) Oboustranný IS (d, h):

$$\left(\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}\,;\, \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}\right)$$

   (b) Levostranný IS $(d; \infty)$

$$\left(\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)}\,;\, \infty\right)$$

   (c) Pravostranný IS $(-\infty; h)$

$$\left(-\infty\,;\, \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)}\right)$$

   $F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$ je α kvantil Fisher-Snedecorova rozdělení o $n_1 - 1$ a $n_2 - 1$ stupních volnosti . . . qf(alpha,n1-1,n2-1).

9.2 Test o jednom náhodném výběru z alternativního rozdělení

- n-krát nezávisle na sobě provádíme tentýž pokus; sledujeme nastání úspěchu nějakého jevu
- pst nastání úspěchu je θ
- náh. výběr $X_1, \ldots, X_n$, kde $X_i = 1$, pokud nastal úspěch, $X_i = 0$, pokud nenastal úspěch, je z alternativního rozdělení
$$X \sim \mathrm{Alt}(\theta).$$
- bodový odhad parametru θ:
$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

9.2.1 Podmínka dobré aproximace

$$n\theta(1-\theta) > 9$$

- musí být splněna
- zaručuje nám spolehlivé testování a stanovení IS pro parametr θ alternativního rozdělení.

9.2.2 Testování hypotézy

- Nechť $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Alt}(\theta)$.
- Testujeme nulovou hypotézu $H_0 : \theta = c$ oproti alternativní hypotéze $H_1 : \theta \neq c$, případně $H_{12} : \theta < c$, či $H_{13} : \theta > c$.
- Nejprve ověříme podmínku dobré aproximace: $nc(1-c) > 9$.

- **Testování kritickým oborem**

  Testovací statistika
$$T_0 = \frac{M-c}{\sqrt{\frac{c(1-c)}{n}}} \sim N(0,1)$$

  1. kritický obor pro oboustrannou alternativu H_{11}: $W = (-\infty; u_{\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$
  2. kritický obor pro levostrannou alternativu H_{12}: $W = (-\infty; u_\alpha\rangle$
  3. kritický obor pro pravostrannou alternativu H_{13}: $W = \langle u_{1-\alpha}; \infty)$

  u_α je α kvantil standardizovaného normálního rozdělení . . . qnorm(alpha,0,1).

- **Testování intervalem spolehlivosti**

  1. oboustranná alt. $H_{11} \rightarrow$ oboustranný $100(1-\alpha)\,\%$ empirický interval spolehlivosti pro parametr θ
$$(d,h) = \left(m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2}\,;\, m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{\alpha/2}\right)$$
  2. levostranná alt. $H_{12} \rightarrow$ pravostranný $100(1-\alpha)\,\%$ empirický interval spolehlivosti pro parametr θ
$$(-\infty,h) = \left(-\infty\,;\, m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{\alpha}\right)$$
  3. pravostranná alt. $H_{13} \rightarrow$ levostranný $100(1-\alpha)\,\%$ empirický interval spolehlivosti pro parametr θ
$$(d,\infty) = \left(m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha}\,;\, \infty\right)$$

  u_α je α kvantil standardizovaného normálního rozdělení . . . qnorm(alpha,0,1).

- **Testování pomocí p-hodnoty**

  1. oboustranná alt. $H_{11} \rightarrow p\text{-val} = 2\min\{\Pr(T_0 \leq t_0), \Pr(T_0 > t_0)\}$
  2. levostranná alt. $H_{12} \rightarrow p\text{-val} = \Pr(T_0 \leq t_0)$
  3. pravostranná alt. $H_{13} \rightarrow p\text{-val} = \Pr(T_0 > t_0) = 1 - \Pr(T_0 \leq t_0)$