ČASOVÉ ŘADY
(SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY)

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

UKB, A29 – RECETOX, dv.č.112
holcik@iba.muni.cz

V. MATEMATICKÉ MODELY VELIČIN

MATEMATICKÉ MODELY VELIČIN SPOJITÝCH V ČASE

HARMONICKÁ FUNKCE

HARMONICKÁ FUNKCE

- **harmonická funkce** je dána vztahem

$$x(t) = A.\cos(\omega t + \varphi_0),$$

kde

  $A>0$ je amplituda harmonické funkce

  $\omega > 0$ je úhlový kmitočet h.f., úhlová rychlost

  φ_0 je počáteční fáze, tj. fáze (počáteční úhel, posun) v čase $t=0$

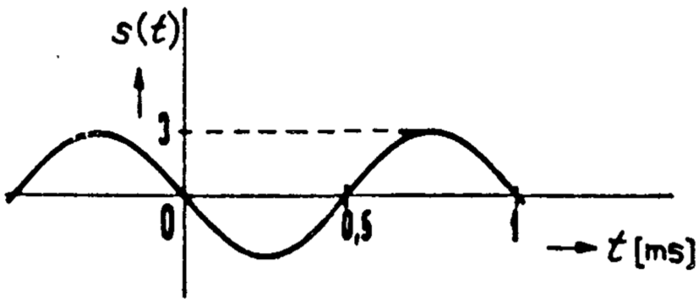
  $\omega t + \varphi_0$ je fáze harmonické funkce

Perioda harmonické funkce je dána vztahem

$$T = 2\pi/\omega$$

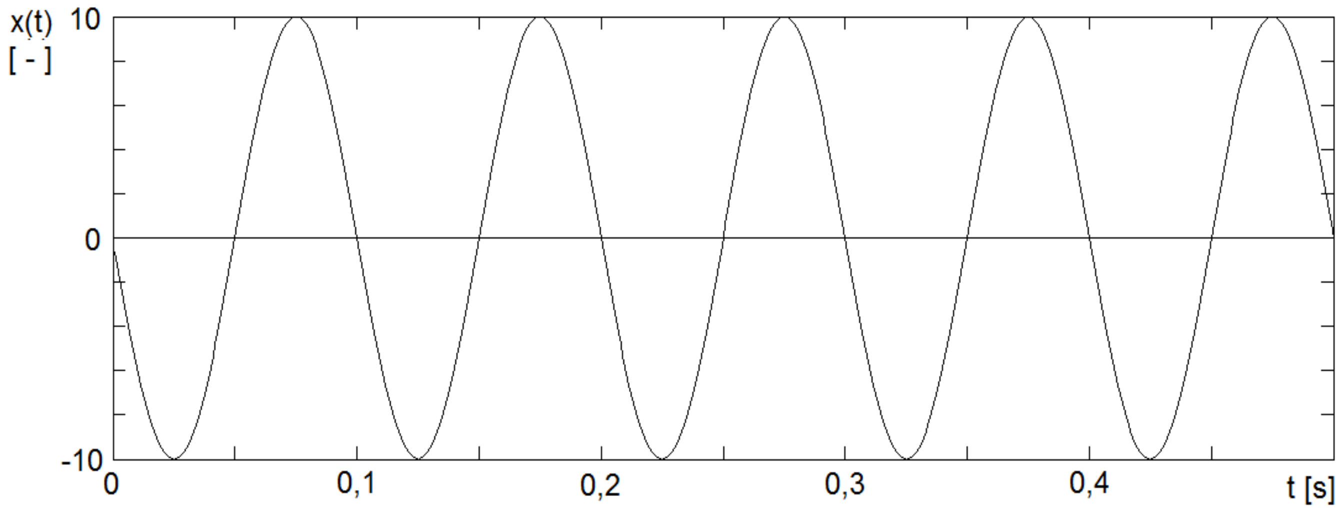
kmitočet h.f. je definován

$$f = 1/T = \omega/2\pi$$



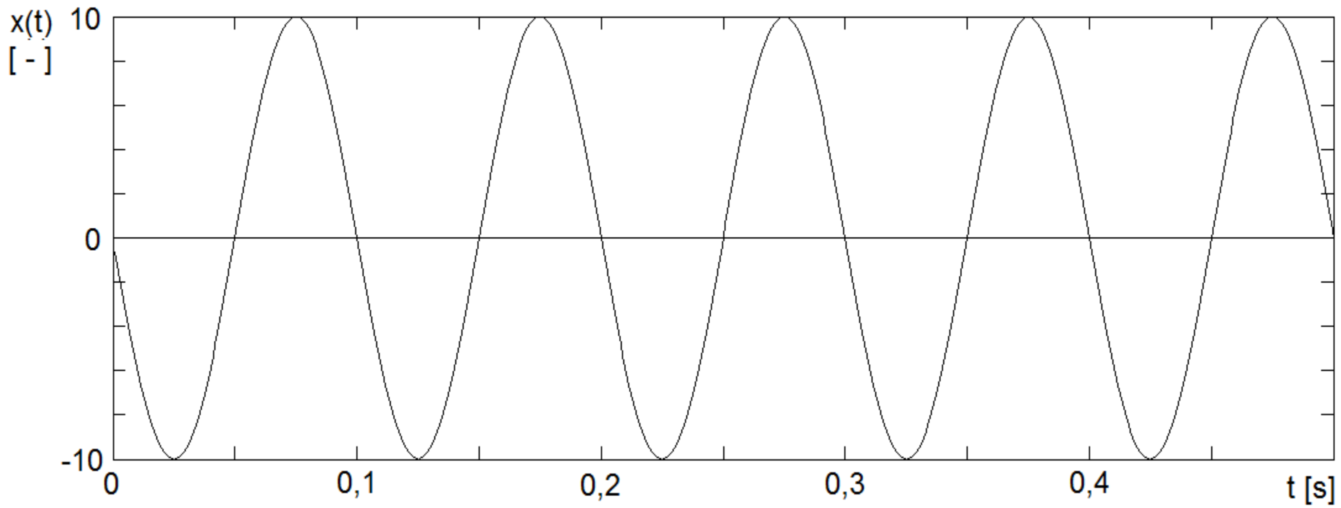
HARMONICKÁ FUNKCE

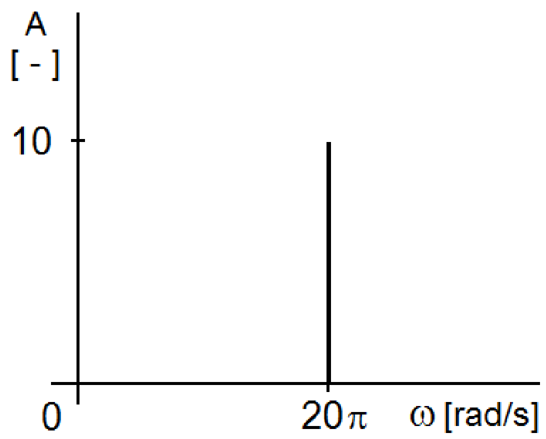
$$x(t) = 10.\cos(2\pi.10t + \pi/2).$$

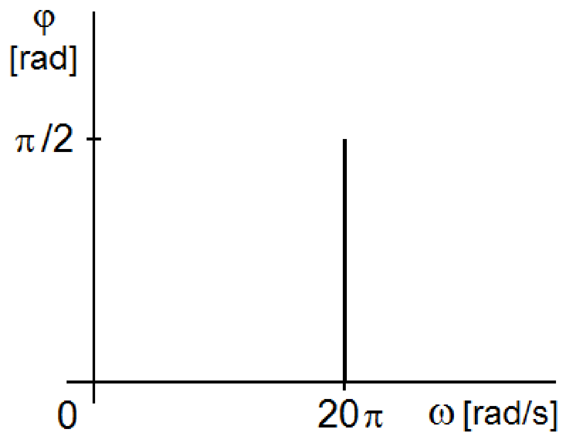


HARMONICKÁ FUNKCE

$$x(t) = 10.\cos(2\pi.10t + \pi/2).$$





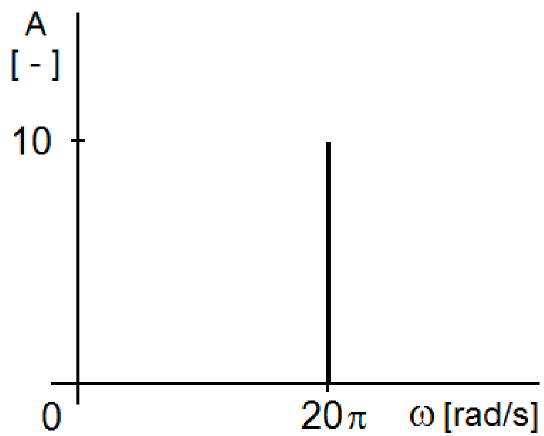


HARMONICKÁ FUNKCE

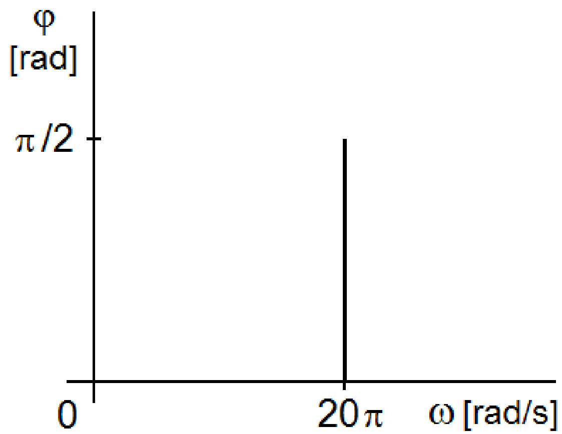
$$x(t) = 10.\cos(2\pi.10t + \pi/2).$$

- tříparametrickou harmonickou funkci lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách
  amplituda x (úhlový) kmitočet a
  počáteční fáze x (úhlový) kmitočet:

$$A = A(\omega) \quad \text{a} \quad \varphi_0 = \varphi_0(\omega);$$



spektrum amplitud



spektrum počátečních fází

!!! FREKVENČNÍ SPEKTRUM !!!

Frekvenční spektrum signálu je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se signál skládá, v závislosti na frekvenci.

! ZAPAMATOVAT! ! NA VĚKY !

HARMONICKÁ FUNKCE

- ☑ další definice

$$x(t) = \mathcal{R}e\{\dot{x}(t)\} = \mathcal{R}e\{A.\exp[j(\omega t + \varphi_0)]\}$$

(vyplývá z Eulerových vztahů)

HARMONICKÁ FUNKCE

kupodivu lze použít i vztah

$$x(t) = \mathit{Re}\{A.\exp[j(-\omega t - \varphi_0)]\} = \mathit{Re}\{\dot{x}^*(t)\}$$

pozor !!! pozor

- záporný kmitočet - ale funguje to

HARMONICKÁ FUNKCE

Protože platí

$$x(t) = Re\{\dot{x}(t)\} = Re\{\dot{x}^*(t)\} \text{ a } Im\{\dot{x}(t)\} = -Im\{\dot{x}^*(t)\}$$

je i

$$x(t) = ½.\{\dot{x}(t) + \dot{x}^*(t)\}$$

$$x(t) = ½.\{A.\exp(j\varphi_0).\exp(j\omega t)\} +$$

$$+ ½.\{A\exp(-j\varphi_0).\exp(-j\omega t)\}$$

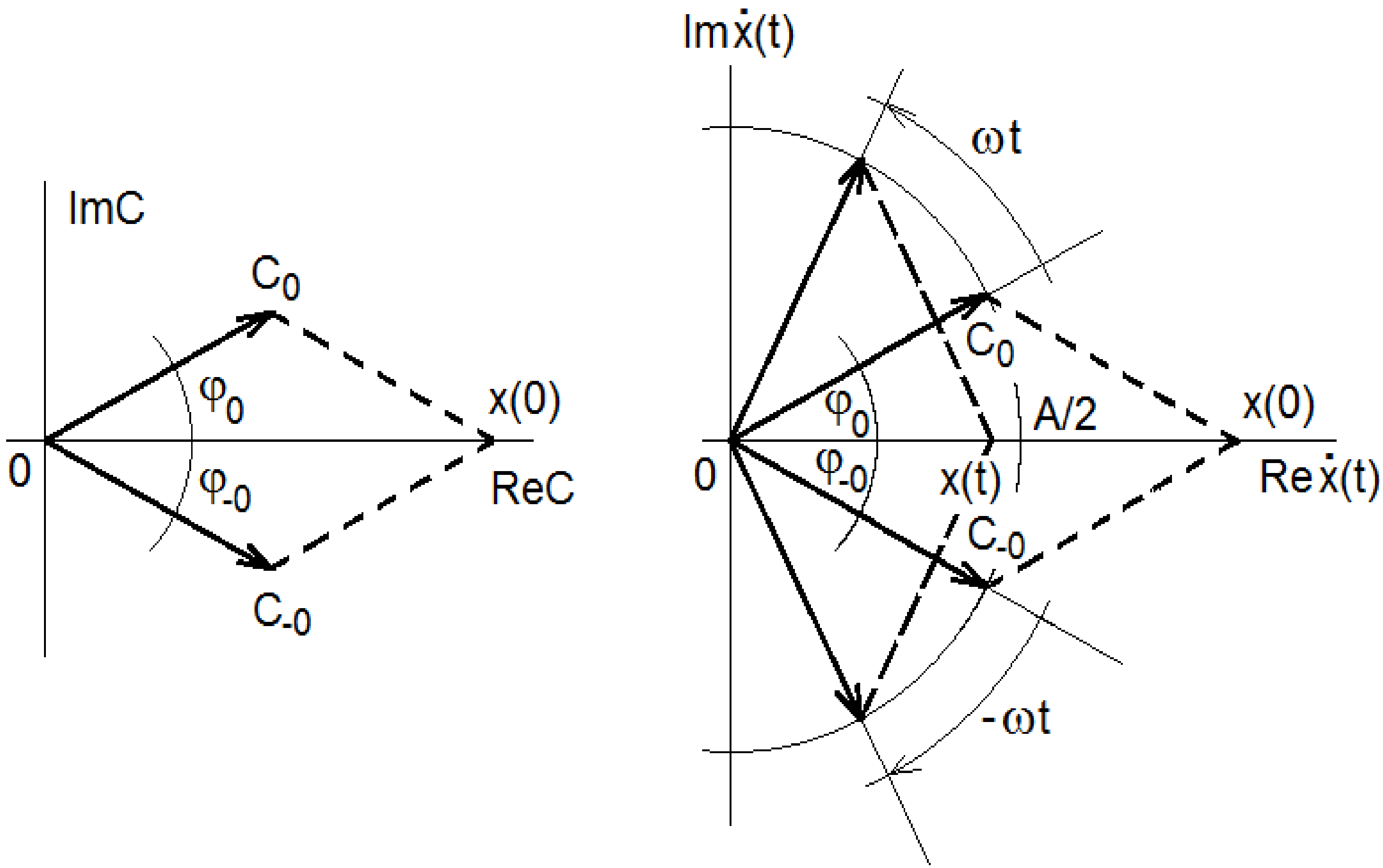
Označíme-li

$$\dot{C}_1 = ½.A.\exp(j\varphi_0) \quad \text{a} \quad \dot{C}_{-1} = ½.A\exp(-j\varphi_0)$$

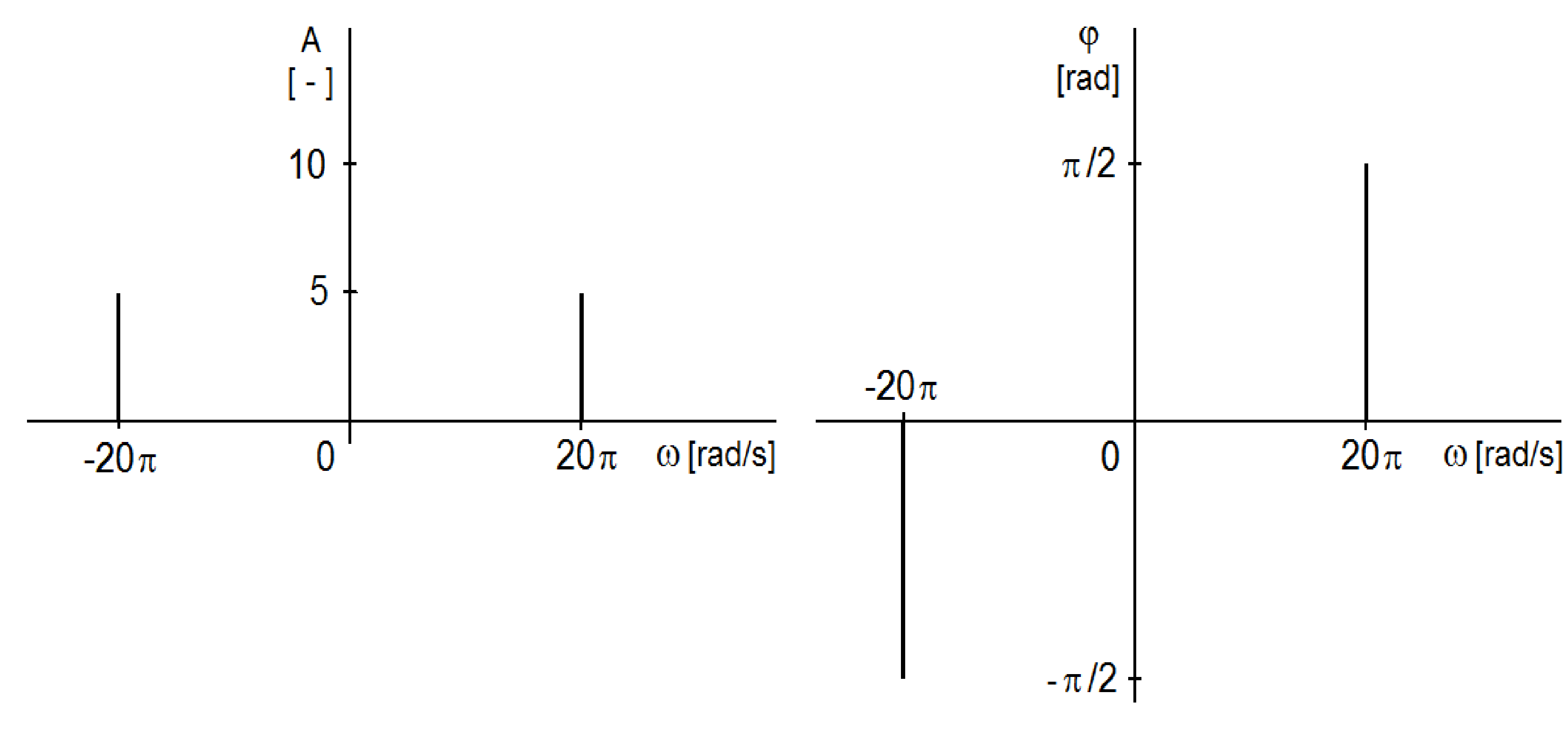
je

$$x(t) = \dot{C}_1.\exp(j\omega t) + \dot{C}_{-1}.\exp[j(-\omega)t]$$

HARMONICKÁ FUNKCE



HARMONICKÁ FUNKCE

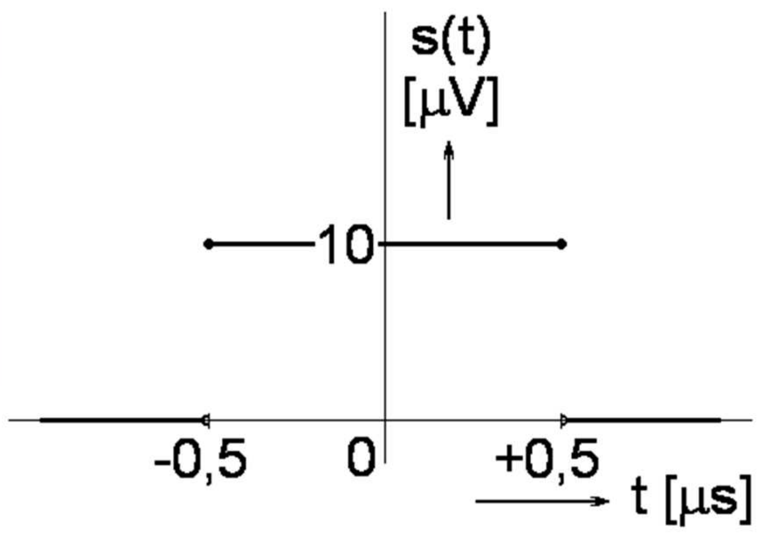


spektrum amplitud **spektrum** počátečních fází

- http://www.mysearch.org.uk/website1/html/222.Function.html
- http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/complex/complex.html
- http://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic
- http://www.khanacademy.org/science/physics/oscillatory-motion/harmonic-motion/v/introduction-to-harmonic-motion
- http://www.youtube.com/watch?v=eeYRkW8V7Vg

NEPERIODICKÉ FUNKCE

- ☑ **jednorázová deterministická veličina**



$s(t) = 10.10^{-6}$ V pro $t \in \langle -0{,}5\ \mu s; 0{,}5\ \mu s \rangle$

$s(t) = 0$ V pro $t \in (0{,}5\ \mu s; \infty \rangle$

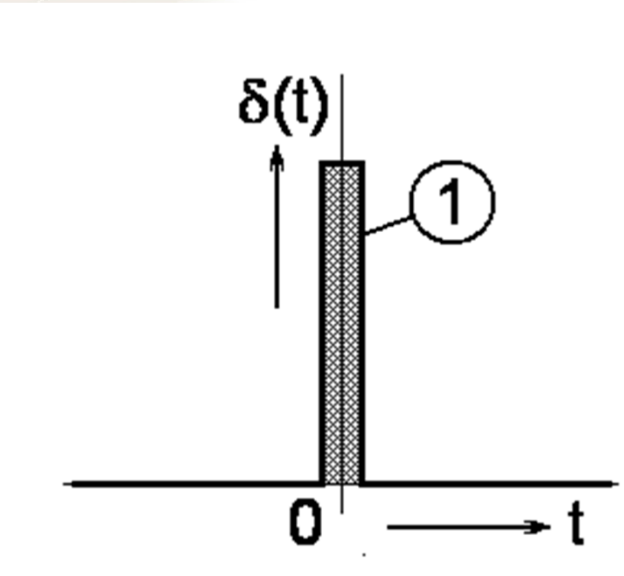
$s(t) = 0$ V pro $t \in \langle -\infty; -0{,}5\ \mu s\ )$

JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

- ☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) - δ(t)

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t).\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$



zjednodušeně:

jednotkový impuls δ(t) je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice (limitně nekonečně) vysoký obdélníkový impulz, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky ⇒ mohutnost je jednotková

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \neq 0; \\ \infty, & \text{pro } t = 0. \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 .$$

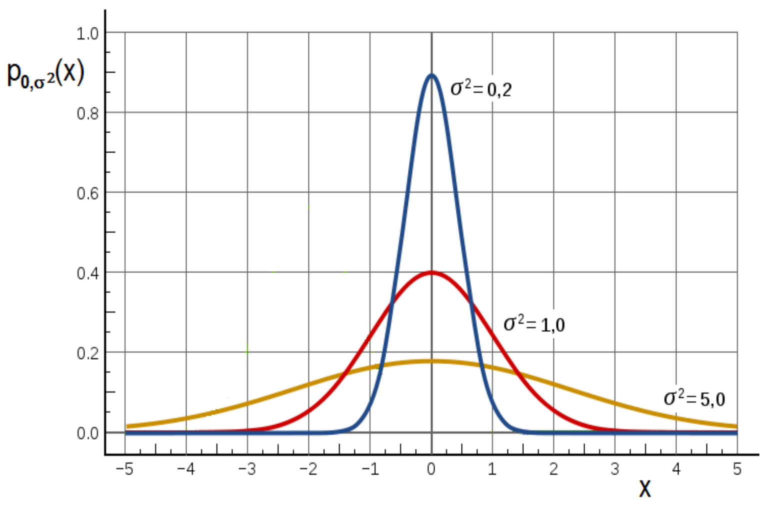
JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

- ☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) - δ(t)

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t).\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

zjednodušeně:



jednotkový impuls δ(t) je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice (limitně nekonečně) vysoký obdélníkový impulz, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky ⇒ mohutnost je jednotková

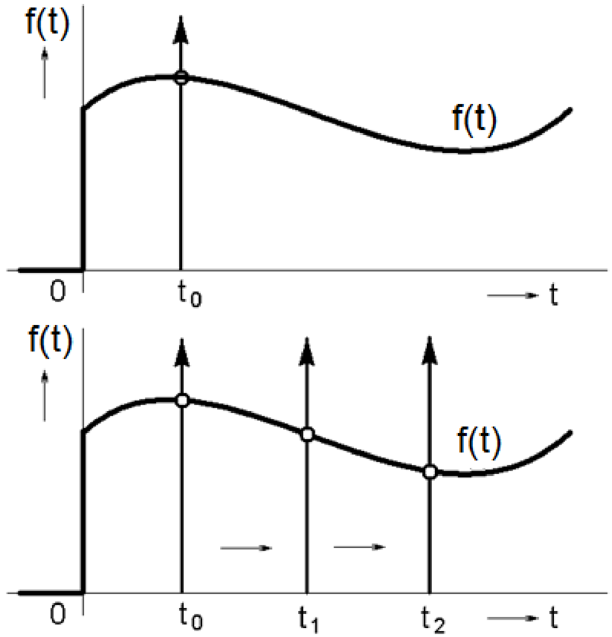
$$\delta(t) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-t^2/\sigma^2}$$

JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

- ☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) - δ(t)

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t).\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$



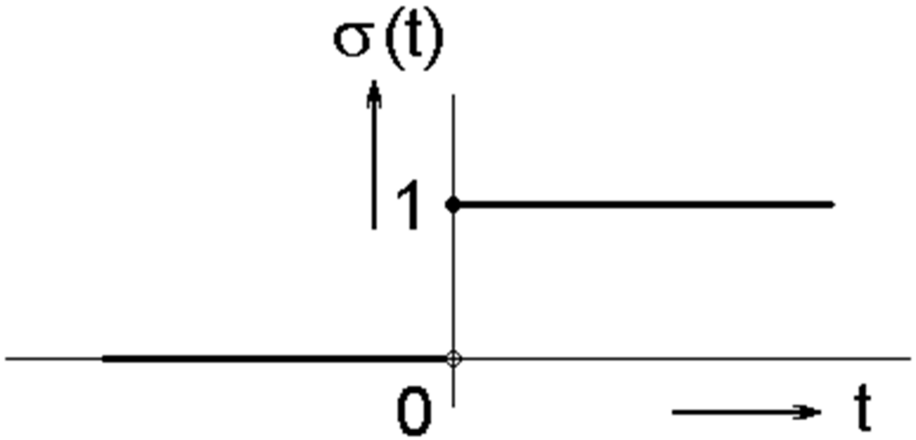
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt =$$

$$= f(t_0).\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = f(t_0).$$

JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

- jednotkový skok (Heavisidova funkce)

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0; \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases}$$



JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

- ☑ pro obě uvedené jednorázové funkce platí:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \sigma(t)$$

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \delta(t).$$

MATEMATICKÉ MODELY VELIČIN DISKRÉTNÍCH V ČASE

PERIODICKÉ POSLOUPNOSTI

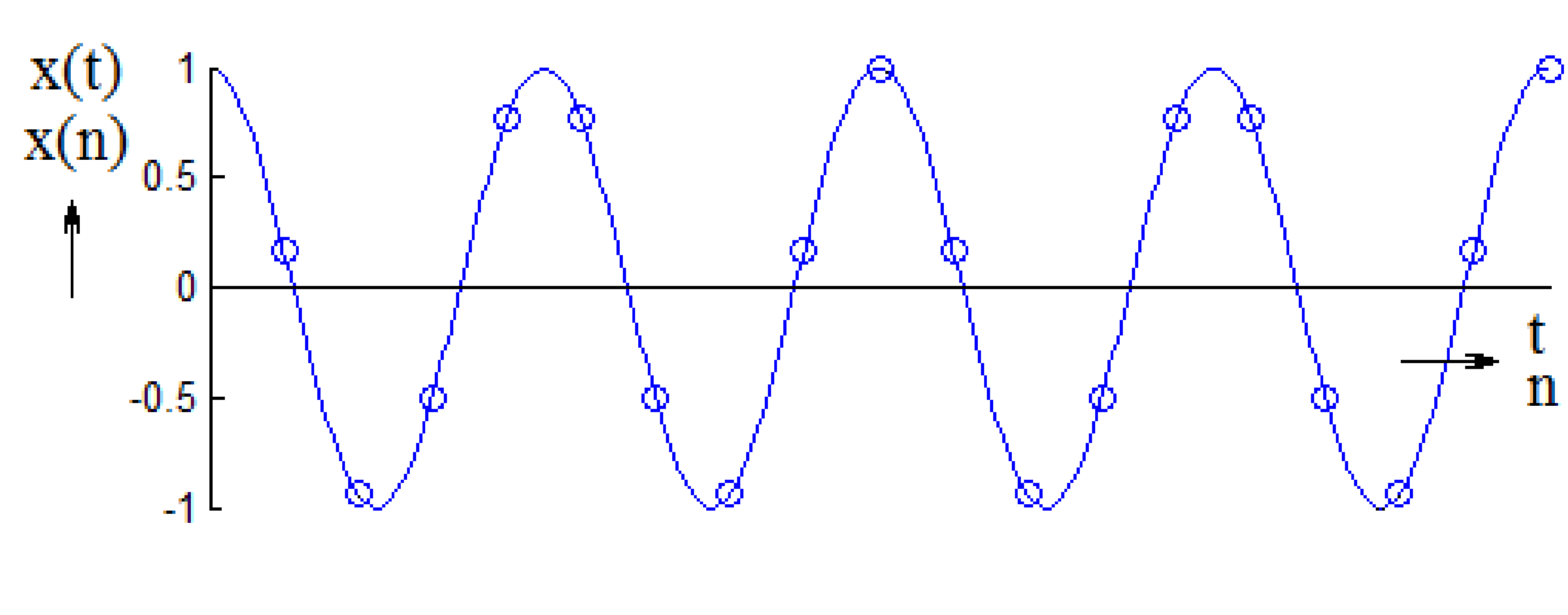
Diskrétní posloupnost $x(nT_{vz})$ je periodická s periodou NT_{vz}, právě když platí

$$x[(n+k.N)T_{vz}] = x(nT_{vz}), \quad \text{pro } n, k = 0, \ 1, \ 2, \ldots,$$

ve zkráceném tvaru argumentu

$$x[n+k.N] = x(n), \quad \text{pro } n, k = 0, \ 1, \ 2, \ldots .$$

PERIODICKÉ POSLOUPNOSTI



HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(2\pi f\, nT_{vz} + \varphi_0) = A.\cos\left(\frac{2\pi\, nT_{vz}}{NT_{vz}} + \varphi_0\right) = A.\cos\left(\frac{2\pi\, n}{N} + \varphi_0\right),$$

když $T = NT_{vz}$ a tedy $f = 1/NT_{vz}$ nebo

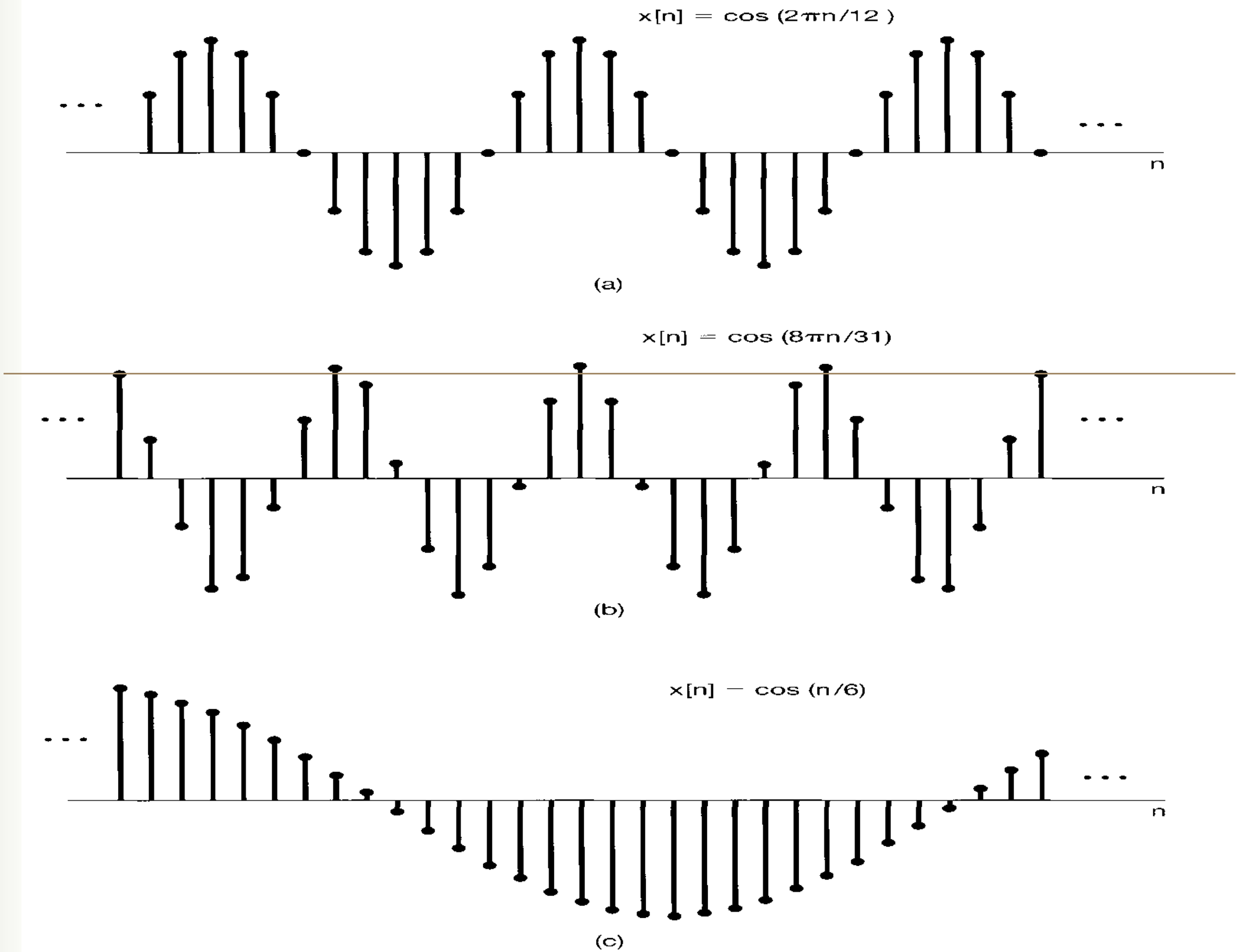
$$x(nT_{vz}) = A.\exp\left(\frac{2\pi j\, n}{N} + \varphi_0\right).$$

Komplexní exponenciála samozřejmě rovněž reprezentuje periodickou veličinu, protože platí

$$x[(k+N)T_{vz}] = \exp\frac{j2\pi(k+N)}{N} = \exp\frac{j2\pi k}{N}.\exp(j2\pi),$$

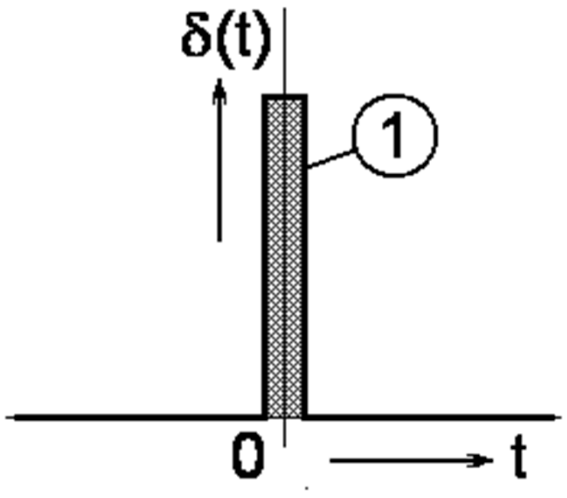
kdy $\exp(2\pi j) = \cos(2\pi) + j.\sin(2\pi) = 1 + j0 = 1$

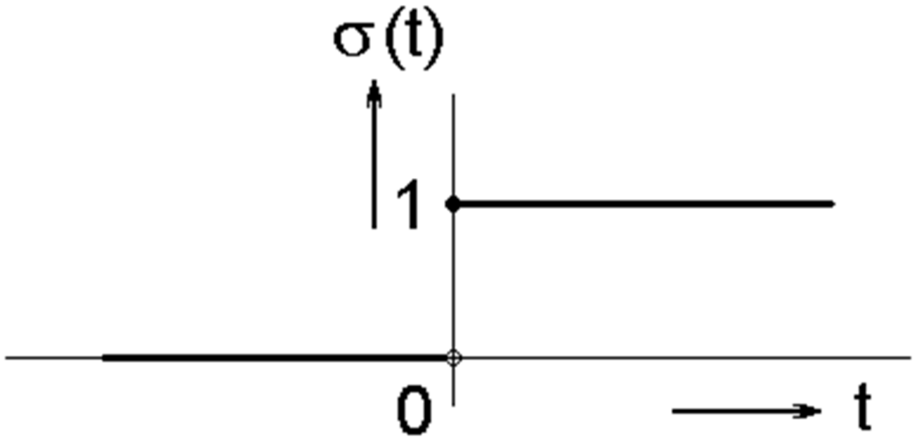
HARMONICKÁ FUNKCE A VZORKOVÁNÍ



JEDNORÁZOVÉ POSLOUPNOSTI

JEDNORÁZOVÉ POSLOUPNOSTI





$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t).\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0; \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases}$$

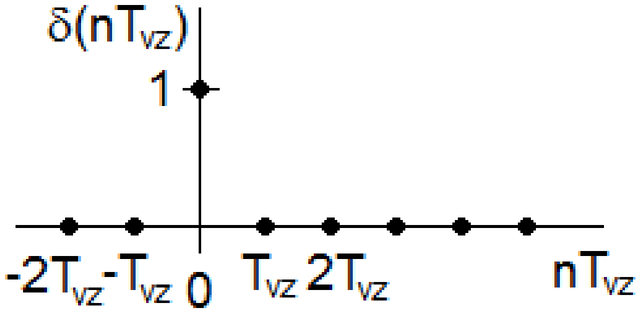
$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \neq 0; \\ \infty, & \text{pro } t = 0. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1\,.$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \sigma(t) \qquad \frac{d\sigma(t)}{dt} = \delta(t).$$

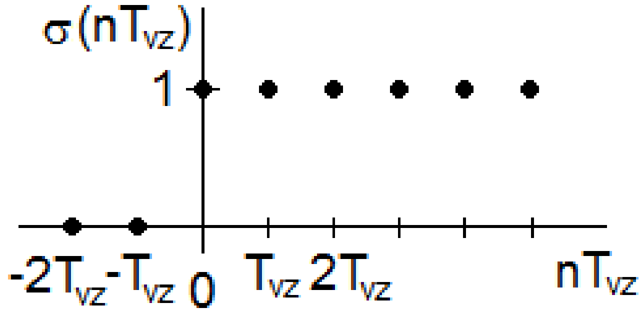
JEDNORÁZOVÉ POSLOUPNOSTI

- diskrétní jednotkový impulz (Kronekerovo delta)



$$\delta(nT_{vz}) = \delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

- diskrétní jednotkový skok



$$\sigma(nT_{vz}) = \sigma(n) = \begin{cases} 0, & n < 0; \\ 1, & n \geq 0. \end{cases}$$

JEDNORÁZOVÉ POSLOUPNOSTI

Podobně jako pro spojitou nezávisle proměnou platí i pro diskrétní, že

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_{vz}).\delta(nT_{vz}) = f(0),$$

resp.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_{vz}).\delta(nT_{vz} - mT_{vz}) = f(mT_{vz}).$$

A také

$$\sum_{n=-\infty}^{m} \delta(nT_{vz}) = \sigma(mT_{vz})$$

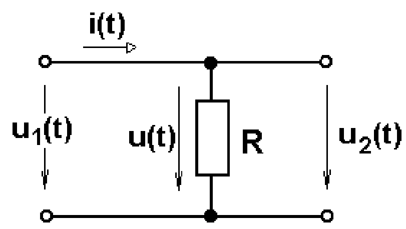
a

$$\delta(nT_{vz}) = \sigma(nT_{vz}) - \sigma[(n-1)T_{vz}].$$

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON SIGNÁLU

jsou odvozeny z primární představy signálu, reprezentovaného elektrickými veličinami, elektrickým napětím, příp. proudem. Na základě fyzikálních zákonitostí platí, že okamžitý výkon p(t) v čase t na reálném odporu R je roven součinu okamžitého napětí na odporu a proudu, jím protékajícím, tedy

$$p(t) = u(t).i(t)$$



Podle Ohmova zákona je

$$u(t) = R.i(t)$$

a po dosazení můžeme psát, že

$$p(t) = R.i(t).i(t) = R.i^2(t) = u(t).u(t)/R = u^2(t)/R.$$

Když je R = 1 Ω, se vztah zjednoduší na

$$p_{R=1}(t) = i^2(t) = u^2(t)$$

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON SIGNÁLU

celková práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za čas T na jednotkovém odporu je

$$A = \int_T p(t)dt = \int_T i^2(t)dt = \int_T u^2(t)dt.$$

Na základě této rozvahy definujeme obecně energii spojité funkce x(t) vztahem

$$E_s = \int_T x^2(t)dt$$

a pro diskrétní posloupnost $x(nT_{vz})$

$$E_d = \sum_n^N x^2(nT_{vz})$$

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON SIGNÁLU

Výkon je práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za časovou jednotku, tj.

$$P = \frac{E}{T}$$

a z toho $P_s = \frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt$ a $P_d = \frac{1}{NT_{vz}}\sum_n^N x^2(nT_{vz})$

Nebo v normalizovaném diskrétním tvaru

$$P_{dn} = \frac{1}{N}\sum_n^N x^2(n)$$

Pokud se energie kumuluje v nekonečně dlouhém časovém intervalu, pak se vztahy modifikují do tvaru

$$P_{s\infty} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt \quad \text{a} \quad P_{d\infty} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{NT_{vz}}\sum_n^N x^2(nT_{vz})$$

příp.

$$P_{dn\infty} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_n^N x^2(n)$$

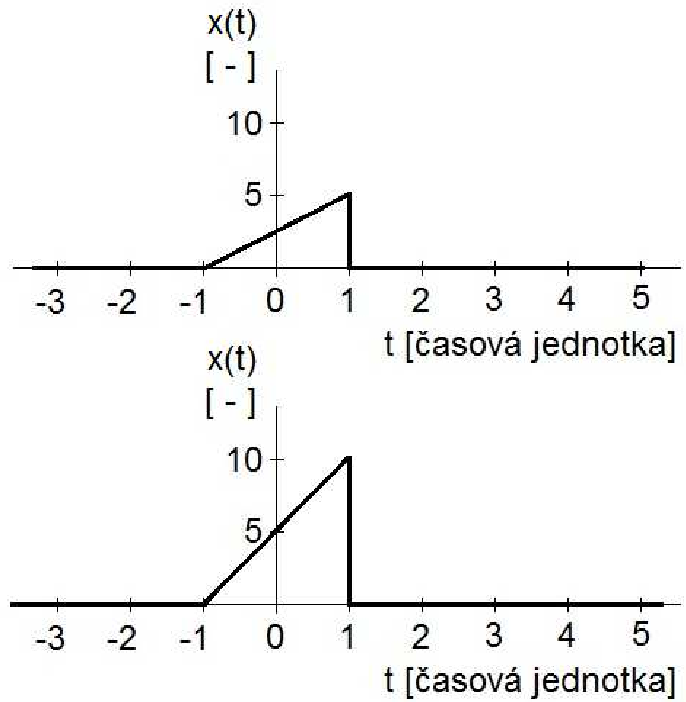
VI. ZÁKLADNÍ OPERACE S MATEMATICKÝMI MODELY VELIČIN

ZÁKLADNÍ OPERACE S MATEMATICKÝMI MODELY VELIČIN SPOJITÝCH V ČASE

OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ
(UNÁRNÍ OPERACE)

☑ **násobení konstantou**

$$x(t) \sim A.x(t),$$



A=2

OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ
(UNÁRNÍ OPERACE)

- ☑ **změna časového měřítka**

$$x(t) \sim x(mt),$$

kde m je kladné reálné číslo

$m > 1$ – časová komprese;

$m < 1$ – časová expanze

$m = 1$ – nic se neděje

OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ
(UNÁRNÍ OPERACE)

☑ **změna časového měřítka**

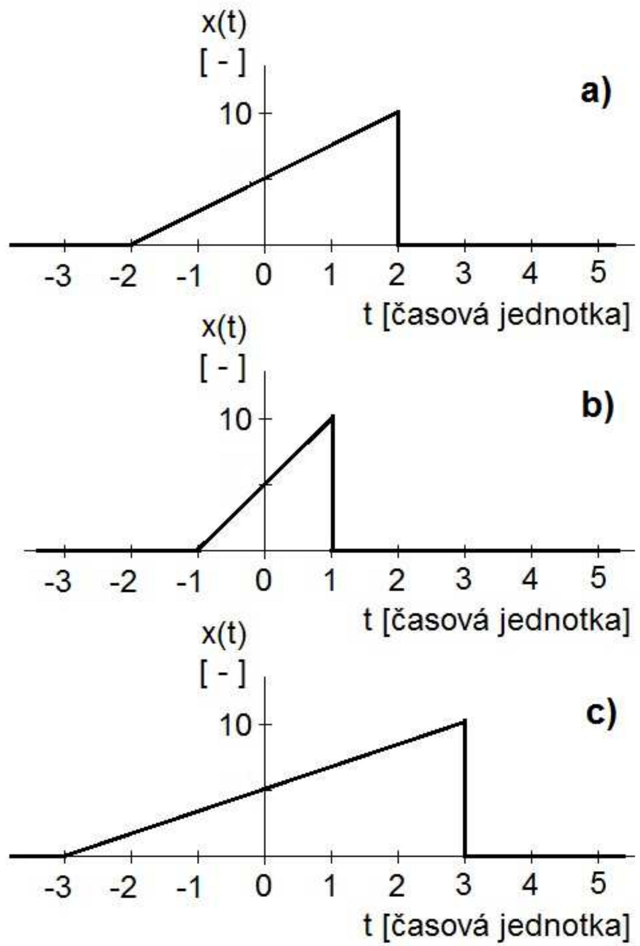
$$x(t) \sim x(mt),$$

kde m je kladné reálné číslo

m > 1 – časová komprese;

m < 1 – časová expanze

m = 1 – nic se neděje



a) originál; b) m=2; c) m=2/3

OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ
(UNÁRNÍ OPERACE)

- **posunutí v čase**

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

τ je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0$ – ?

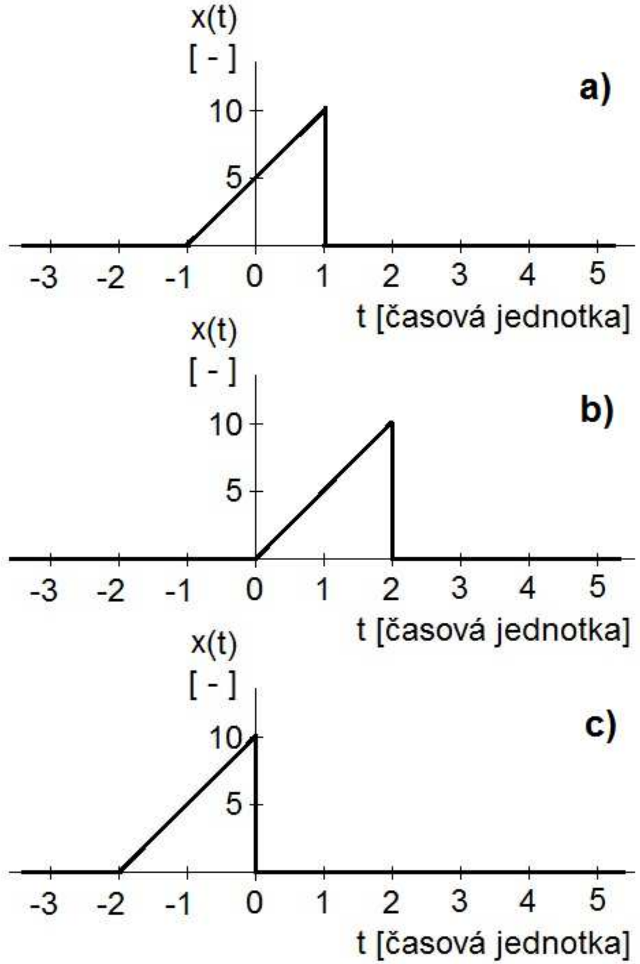
OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ
(UNÁRNÍ OPERACE)

☑ **posunutí v čase**

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

τ je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0$ – zpoždění

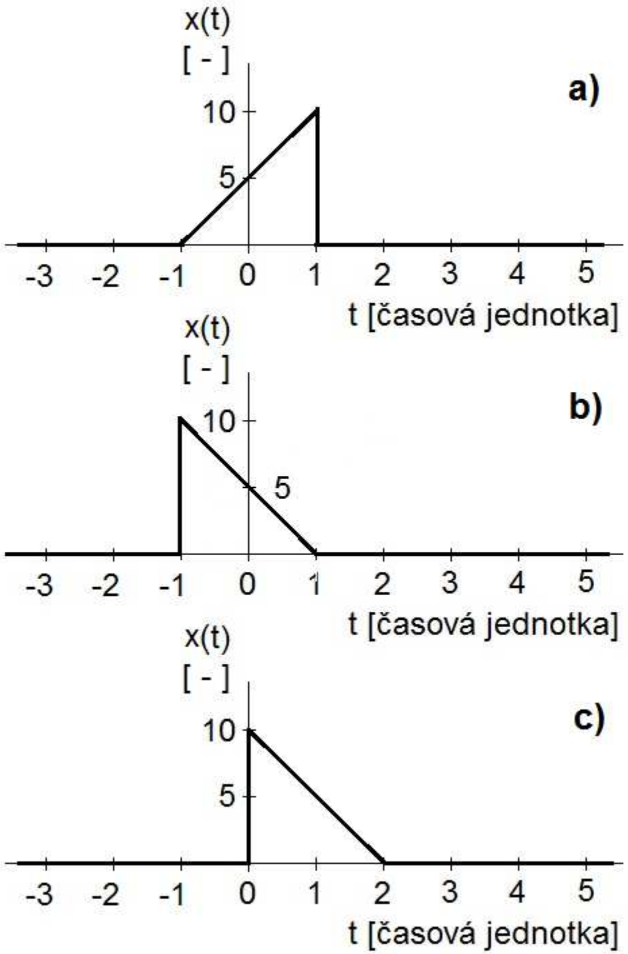


a) originál x(t); b) funkce x(t-1); c) funkce x(t+1);

OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ
(UNÁRNÍ OPERACE)

☑ **obrácení (inverze) časové osy**

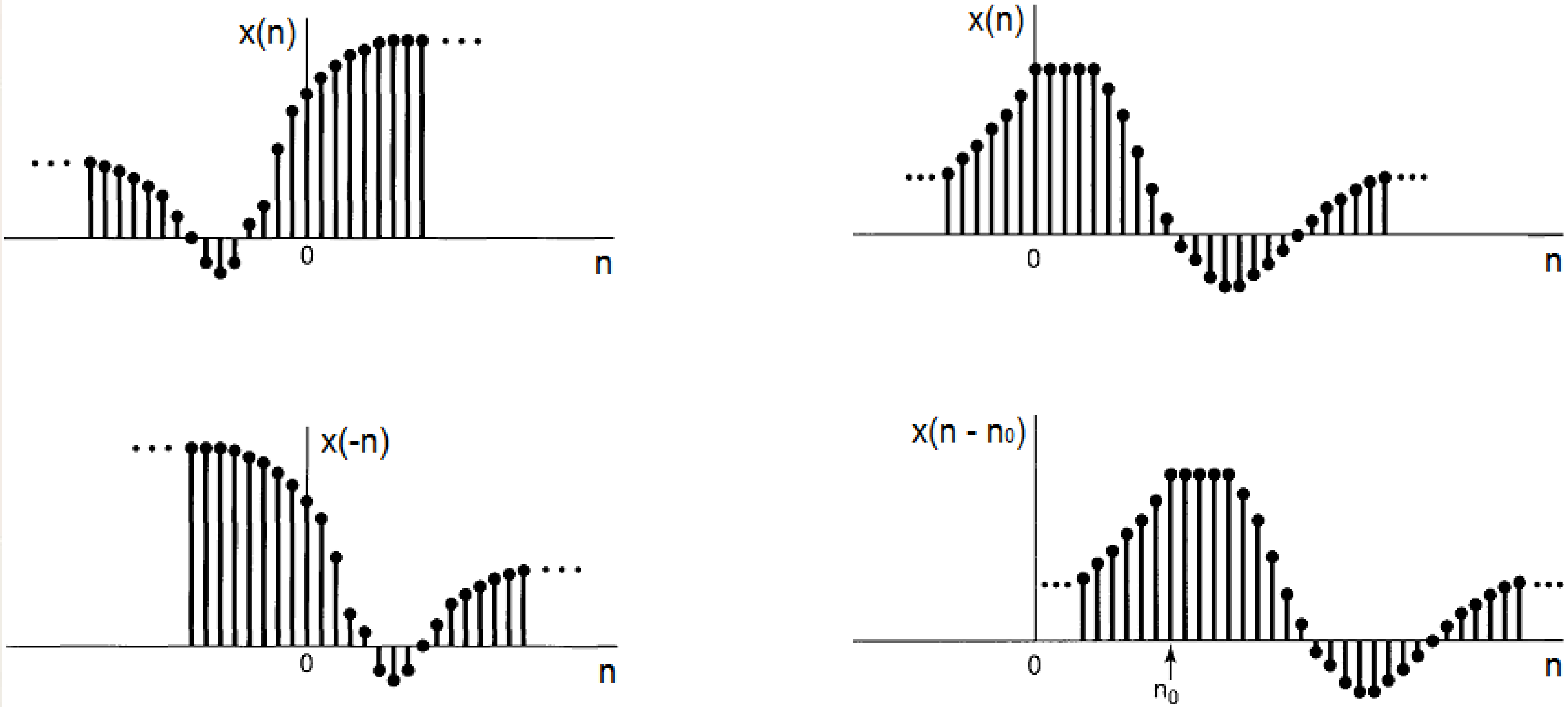
$$x(t) \sim x(-t)\ ,$$



a) originál x(t); b) funkce x(-t); c) funkce x(-t+1)

ZÁKLADNÍ OPERACE S MATEMATICKÝMI MODELY VELIČIN DISKRÉTNÍCH V ČASE

JE TO TŘEBA?



SHRNUTÍ

- ☑ definice základních modelů veličin (jednotkový skok, impulz, periodická funkce/posloupnost);
- ☑ různé formy vyjádření harmonické funkce/posloupnosti;
- ☑ co je frekvenční spektrum?
- ☑ základní unární operace s funkcemi/po-sloupnostmi.

ZA TÝDEN NASHLEDANOU