

# Príklady z cvičení predmetu F3060

## Kmity, vlny, optika

Juraj Rusnačko  
Ústav fyziky kondenzovaných látok, MU

26. 12. 2017

### 1 Cvičenie 1

- 1.1 Teleso o hmotnosti  $m$  kmitá na pružine o tuhosti  $k$ . Zostavte a vyriešte pohybovú rovnicu pre teleso, gravitáciu neuvažujte.
- 1.2 Určte časovú závislosť výchylky telesa z príkladu 1.1 v prípade, že poznáte počiatočné podmienky  $x(0) = x_0$ ,  $v(0) = v_0$ .
- 1.3 Teleso o hmotnosti  $m$  je zavesené na pružine o tuhosti  $k$ . Berúc do úvahy gravitačné pôsobenie Zeme, vypočítajte rovnovážnu polohu telesa a popíšte, ako gravitácia ovplyvní kmity oscilátoru.
- 1.4 Vypočítajte časovú strednú hodnotu kinetickej a potenciálnej energie lineárneho harmonického oscilátoru.

### 2 Cvičenie 2

- 2.1 Uvažujte štandardný tlmený RLC obvod. Určte časovú závislosť náboja na kondenzátore  $Q(t)$ .
- 2.2 Uvažujte štandardný tlmený RLC obvod, ktorý je budený striedavým napätím  $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ . Určte časovú závislosť náboja na kondenzátore  $Q(t)$ , a to jednak ustálené riešenie, ako aj prechodový jav.
- 2.3 Dve matematické kyvadlá o totožných dĺžkach závesu  $l$  a hmotnostiach závaží  $m$  sú zavesené vedľa seba. Závažia sú spojené horizontálnou pružinou o tuhosti  $k$  tak, že pre nevychýlené závažia je pružina nenatiahnutá. Popíšte kmity sústavy – predpokladajte, že pružina ostáva celý čas v horizontálnej polohe a že platí aproximácia malých kmitov sústavy  $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$ .

### 3 Cvičenie 3

- 3.1 Uvažujte sústavu dvoch viazaných lineárnych oscilátorov vo forme závaží, každé o hmotnosti  $m$ , navzájom spojené pružinou o tuhosti  $k$ . Z druhej strany sú obe závažia spojené s nehybnou stenou ďalšou pružinou o tuhosti  $k$ . Určte vlastné frekvencie tzv. normálnych módov sústavy (obe telesá kmitajú s rovnakou frekvenciou) a kvalitatívne ich popíšte.
- 3.2 Uvažujte tlmený a budený harmonický oscilátor s obecnou periodickou budiacou silou  $F(t)$ . Napíšte rozklad  $F(t)$  pomocou Fourierovho radu a využite linearitu pohybovej rovnice – ukážte, že riešením pohybovej rovnice je

$$x(t) = \sum_j a_j y_j(t) + b_j z_j(t),$$

kde  $y_j(t)$  a  $z_j(t)$  sú riešenia pohybových rovníc s pravou stranou rovnou  $\cos(\omega_j t)$ , resp.  $\sin(\omega_j t)$ .

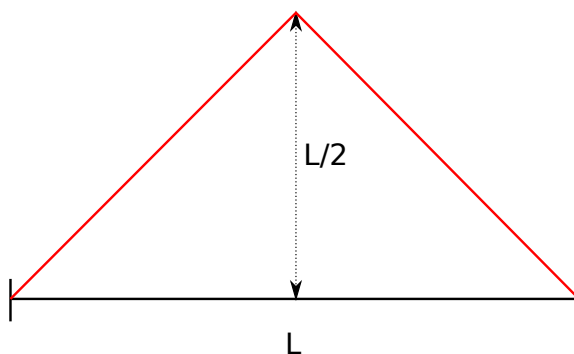
- 3.3 Odvod'te vlnovú rovnicu pre elektromagnetické vlnenie v obecnom prostredí (použite Maxwellove rovnice).
- Ukážte, že  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ct + \phi)$  je riešením vákuovej vlnovej rovnice.
  - Ukážte, že vlnoplocha vlny zadanej v časti (a) je rovina.
  - Akým smerom sa pohybujú vlnoplochy vln  $\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$  a  $\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t + \phi)$ ?
  - Akou rýchlosťou sa pohybujú vlnoplochy vlny zadanej v časti (a)?
  - Aká je vlnová dĺžka vlnenia zadaného v časti (a)?

### 4 Cvičenie 4

- 4.1 Určte tvar vlny, ktorá vznikne súčtom dvoch postupných vln s rovnakou amplitúdou, frekvenciou a vlnovou dĺžkou cestujúcich proti sebe.
- 4.2 Vyšetrite vplyv okrajových podmienok na možné frekvencie a vlnové dĺžky stojatých vln, menovite uvažujte prípady: oba konce pevné, jeden koniec pevný a jeden voľný, oba konce voľné. Pevný koniec v  $x_0$  znamená  $u(x_0, t) = 0$  a voľný koniec v  $x_0$  zas  $du(x_0, t)/dx = 0$ . Za obecnú stojatú vlnu považujte nasledujúcu funkciu:

$$u(x, t) = a \cos(kx) \cos(\omega t) + b \sin(kx) \cos(\omega t) + c \cos(kx) \sin(\omega t) + d \sin(kx) \sin(\omega t).$$

- 4.3 Uvažujte strunu dĺžky  $L$  upevnenú na oboch koncoch. Strunu chytíme v strede a vychýlime o vzdialenosť  $L/2$ , takže jej tvarom je rovnoramenný trojuholník (viď obrázok 1).



**Obr. 1:** Vychýlená struna.

- (a) Vypočítajte možné frekvencie módov struny. Napätie v strune je  $T = 1000$  N, hmotnosť struny je  $m = 0.02$  kg a dĺžka struny je  $L = 2$  m.
- (b) V čase  $t = 0$  strunu pustíme tak, že každý bod struny má nulovú počiatočnú rýchlosť. Určte časovú a priestorovú závislosť výchylky struny  $A(x, t)$ . Ná-poveda: predpokladajte výchylku v tvare

$$A(x, t) = C + \sum_n \left( a_n \cos(k_n x) \cos(\omega_n t) + b_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) + c_n \cos(k_n x) \sin(\omega_n t) + d_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t) \right).$$

Ktoré z koeficientov  $a_n, b_n, c_n, d_n$  sú v tomto prípade obecné nenulové a ktoré vždy nulové? Pre určenie nenulových koeficientov uvažujte periodické predĺženie funkcie znázorňujúcej počiatočný tvar struny.

## 5 Cvičenie 5

- 5.1 Búrka spôsobila vlny v hlbokej vode, ktoré sa šíria k pobrežiu vzdialenému 100 km. Vlnová dĺžka vln je 10 m. Vypočítajte čas, za ktorý dorazia vlny na pobrežie a čas medzi príchodom dvoch nasledujúcich hrebeňov vln. Disperzná závislosť pre vlny v hlbokoj vode je  $\omega = \sqrt{gk}$ ,  $g$  je tiažové zrýchlenie.
- 5.2 Určte disperznú závislosť pre svetlo šíriace sa v izotropnom dielektriku. Ako sa zmení fázová rýchlosť a vlnová dĺžka oproti vlnám vo vákuu?
- 5.3 Určte (komplexný) index lomu izotropného dielektrika použitím Lorentzovho modelu dielektrika (atómy sú zhodné,  $N$  elektrónov v objemovej jednotke pružne viazaných k jadru).
- 5.4 Ukážte, že pre grupovú rýchlosť vlnenia platí  $v_g \equiv \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}$ .
- 5.5 Použitím disperzného vzťahu

$$N^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_j \left( \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} \right)$$

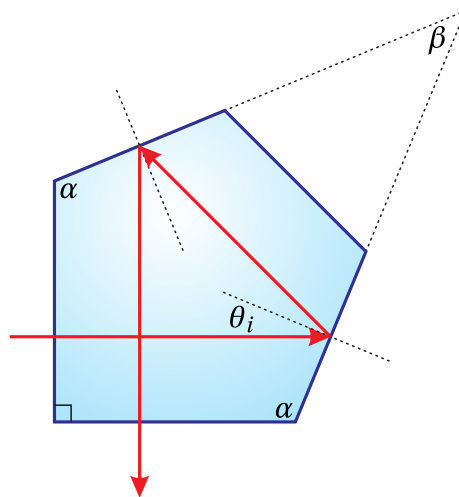
ukážte, že grupová rýchlosť pre vysokofrekvenčné elektromagnetické vlny (napr. röntgenové žiarenie) je

$$v_g = \frac{c}{1 + Nq_e^2 / \epsilon_0 m_e \omega^2 2}$$

Keďže  $f_j$  sú váhové faktory, platí  $\sum_j f_j = 1$ . Aký tvar má fázová rýchlosť? Ukážte, že  $vv_g \approx c$ .

## 6 Cvičenie 6

- 6.1 Vypočítajte Poyntingov vektor  $\mathbf{S}$  a hustotu energie  $\mathcal{E}$  pre rovinnú vlnu vo vákuu  $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{x}^0 \cos(kz - \omega t)$ . Ukážte, že  $\mathbf{S}$  a  $\mathcal{E}$  vyhovujú Poyntingovmu teorému.
- 6.2 Žiarovkou o účinnosti  $\eta = 1\%$  preteká prúd  $I = 0.25$  A pri napätí  $U = 3$  V. Predpokladajte, že žiarovka vyžaruje monochromatický zväzok svetla o priereze  $S = 10$  cm<sup>2</sup> a vlnovej dĺžke  $\lambda = 550$  nm. Určte:
- počet fotónov vyžiarených za 1 sekundu,
  - počet fotónov v objemovej jednotke,
  - intenzitu svetla a hustotu objemovú hustotu energie.
- 6.3 "Pentaprism" (vid' obrázok 2) je optický element, ktorý sa mimo iné používa vo fotoaparátoch a iných optických prístrojoch. Svetlo je po prechode hranolom kolmé na smer dopadu a obraz je neprevrátený. Zistite uhol  $\beta$  z geometrie hranolu. Ak má sklo index lomu 1.5, určte aká časť intenzity svetla prejde hranolom a aká časť sa "stratí" pri odrazoch (viacnásobné odrazy zanedbajte).



**Obr. 2:** Geometria hranolu. (J. Peatross, M. Ware: Physics of Light and Optics)

## 7 Cvičenie 7

7.1 Uvažujte rozhranie vzduch/voda (index lomu 1.33). Svetlo dopadá na rozhranie pod uhlom  $30^\circ$  a je:

- (a) lineárne polarizované pod uhlom  $50^\circ$  voči rovine dopadu,
- (b) nepolarizované.

Určte odrazivosť rozhrania. Aký musí byť uhol dopadu, aby bolo odrazené svetlo polarizované lineárne v rovine kolmej na rovinu dopadu? Aký musí byť uhol dopadu, aby došlo k úplnému odrazu?

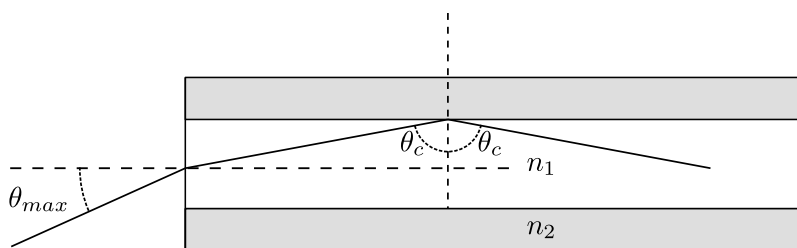
7.2 V prípade úplného odrazu  $\theta_i > \theta_{\text{crit}}$  je možné zapísať Fresnelove koeficienty v tvare  $r_s = e^{-i\delta_s}$ ,  $r_p = -e^{-i\delta_p}$ . Vypočítajte uhly  $\delta_s, \delta_p$  a ukážte, že pre fázový rozdiel medzi s- a p-polarizovanou vlnou  $\Delta \equiv \delta_p - \delta_s$  platí:

$$\tan \frac{\Delta}{2} = \frac{(n_i - n_t) \sqrt{\frac{n_i^2}{n_t^2} \sin^2 \theta_i - 1}}{\cos \theta_i \left[ 1 + n_i n_t \left( \frac{n_i^2}{n_t^2} \sin^2 \theta_i - 1 \right) / \cos^2 \theta_i \right]}.$$

7.3 V prípade úplného odrazu  $\theta_i > \theta_{\text{crit}}$  vzniká za rozhraním tzv. evanescentná vlna. Odvod'te jej tvar a vypočítajte, na akej vzdialenosti  $d$  od rozhrania poklesne amplitúda vlny  $\frac{1}{e}$ -krát.

## 8 Cvičenie 8

8.1 Optické vlákno (vid' obrázok 3) pozostáva z jadra o indexe lomu  $n_1$  a obalu o indexe lomu  $n_2$ . Ukážte, že numerická apertúra je  $NA \equiv \sin \theta_{\text{max}} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ .



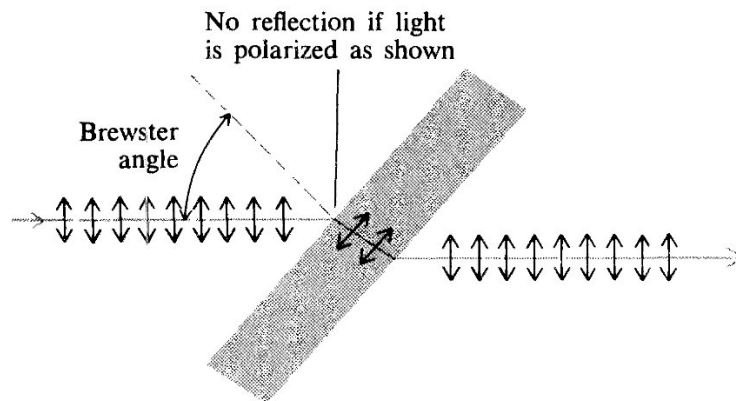
Obr. 3: Optické vlákno.

8.2 P-polarizované svetlo dopadá na tzv. Brewsterovo okno pod Brewsterovým uhlom (vid' obrázok 4). Ukážte, že v takomto usporiadaní je odrazivosť oboch rozhraní nulová.

8.3 Uvažujte rovinnú vlnu:

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}^0 E_{0x} \cos(kz - \omega t + \phi_x) + \mathbf{y}^0 E_{0y} \cos(kz - \omega t + \phi_y).$$

Stanovte Jonesov polarizačný vektor  $\mathbf{J}$  pre prípady:

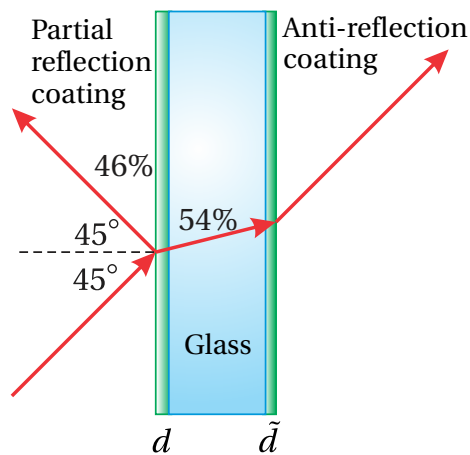


**Obr. 4:** Brewsterovo okno. (G. Fowles: Introduction to modern optics)

- (a)  $E_{0y} = 0, \phi_x = \phi_y = 0,$
  - (b)  $E_{0x} = 0, \phi_x = \phi_y = 0,$
  - (c)  $E_{0x} = E_0 \cos \alpha, E_{0y} = E_0 \sin \alpha, \phi_x = \phi_y = 0,$
  - (d)  $E_{0x} = E_{0y} = E_0, \phi_x = \pi/2, \phi_y = 0,$
  - (e)  $E_{0x} = E_{0y} = E_0, \phi_x = 0, \phi_y = \pi/2,$
  - (f) lineárne polarizované svetlo pod  $45^\circ$  uhlom od osi  $x$ .
- 8.4 Ukážte, že kruhovo polarizované svetlo sa dá dosiahnuť pomocou štvrt'vlnnej doštičky a lineárneho polarizátoru s osou pod uhlom  $45^\circ$  voči ose  $x$ . Záleží na poradí umiestnenia optických prvkov?
- 8.5 Uvažujte sústavu troch polarizátorov: lineárneho polarizátoru s osou v smere  $x$ , lineárneho polarizátoru s osou pod uhlom  $45^\circ$  od osi  $x$  a lineárneho polarizátoru s osou v smere  $y$ . Aký je výsledný polarizačný stav? Aký je pomer medzi intenzitou prešlého a dopadajúceho zväzku?
- 8.6 Kruhovo polarizované svetlo dopadá kolmo na rozhranie vzduch-sklo (index lomu skla je 1.5). Určte Jonesov vektor odrazeného svetla. Aký je pomer medzi intenzitou odrazeného a dopadajúceho zväzku?

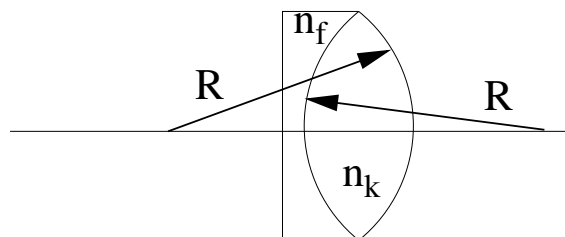
## 9 Cvičenie 9

- 9.1 Na obrázku 5 je 'beam-splitter' navrhnutý pre s-polarizované svetlo dopadajúce pod uhlom  $45^\circ$ . Na prednú stranu skla je nanosená tenká vrstva ZnS ( $n = 2.32$ ), ktorá spôsobí zvýšenú odrazivosť prvého rozhrania – približne 0.5. Na druhú stranu skla je nanosená vrstva MgF ( $n = 1.38$ ), ktorá minimalizuje odrazivosť druhého rozhrania. Vlnová dĺžka žiarenia je 633 nm. Vypočítajte hrúbky rozhraní  $d$  a  $\tilde{d}$  tak, aby odrazivosť prvého rozhrania bola čo najväčšia a odrazivosť druhého rozhrania čo najmenšia.



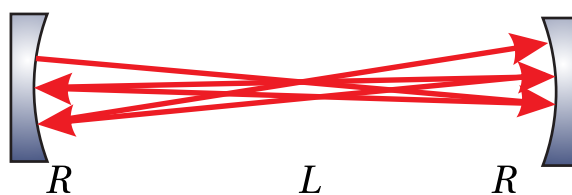
**Obr. 5:** Beam-splitter. (J. Peatross, M. Ware: Physics of Light and Optics)

- 9.2 Svetlo z nekonečne vzdialeného zdroja dopadá na zrkadlo a po odraze je fokusované do jediného bodu (ohniska). Pomocou Fermatovho princípu najmenšieho času zistite, aký tvar má takéto zrkadlo.
- 9.3 Index lomu vzduchu závisí na teplote, čoho dôsledkom je napr. fata morgana. Pomocou Fermatovho princípu zistite, aký tvar majú trajektórie paprskov v prostredí, kde index lomu závisí na vertikálnej vzdialenosti od povrchu podľa vzťahu  $n(x) = n_o(1 + \kappa x)$ .
- 9.4 Optická sústava sa skladá z dvoch dotýkajúcich sa šošoviek (obrázok 6). Prvá šošovka je plankonvexná (ploskovypuklá) z flintového skla ( $n_f = 1.627$ ) a druhá šošovka bikonvexná (dvojvypuklá) z korunového skla ( $n_k = 1.517$ ). Polomery krivosti druhej šošovky sú  $R = 0.12$  m. Nájdite ohniskovú vzdialenosť sústavy.



**Obr. 6:** Schéma optickej sústavy.

- 9.5 Vzdialený predmet sa približuje smerom k ohnisku spojnej šošovky rovnomerne rýchlosťou  $v$ . Popíšte pohyb obrazu.
- 9.6 Dutina je „stabilná“, ak aj po mnohých odrazoch ostáva svetlo vo vnútri dutiny a neopustí ju – vid’ obrázok 7. Odvod’te podmienku stability pre vzdialenosť dvoch zrkadiel  $L$ , ak poznáte ich polomery krivosti  $R$ .



**Obr. 7:** Laserová dutina – rezonátor. (J. Peatross, M. Ware: Physics of Light and Optics)

## 10 Cvičenie 10

- 10.1 Vypočítajte intenzitu difrakčného obrazca obdĺžnikovej štrbiny vo Fraunhoferovej aproximácii.
- 10.2 Vypočítajte intenzitu difrakčného obrazca  $N$  zhodných, ekvidistantných obdĺžnikových štrbín vo Fraunhoferovej aproximácii. Ďalej odvod'te rovnicu popisujúcu uhlové polohy difrakčných maxím tohto obrazca.
- 10.3 Difrakčná mriežka má 300 vrypov na milimeter a je osvietená monochromatickým svetlom o vlnovej dĺžke 633 nm. Koľko interferenčných maxím je možné pozorovať na tienidle? Ako sa odpoveď zmení, ak sa celá optická sústava ponorí do vody o indexe lomu 1.33?