

SFaT – domácí úkol

Zde je zadání první sady příkladů do Statistické fyziky a termodynamiky. Řešení, prosím, pište čitelně na papír formátu A4 nebo to můžete vyzáčet třeba v \LaTeX u. Svůj postup řádně zdůvodněte.

1. Spočítejte hustotu stavů $\rho(E)$ pro volnou nerelativistickou částici o hmotnosti m v jednorozměrném případě.
2. Pro systém N kvantových harmonických oscilátorů (z nichž každý má energii $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$) spočítejte partiční funkci, energii a tepelnou kapacitu při konstantním objemu a počtu částic. Ověřte platnost 3. věty termodynamické pro $\lim_{T \rightarrow 0^+} C_V$.

3. Teplota Neptunu

Za rozumných předpokladů spočítejte teplotu povrchu planety Neptun. Zanedbejte všechny možné vnitřní zdroje tepla. Jaké předpoklady jste udělali o atmosféře a/nebo povrchu Neptunu?

Astronomická data, která vám mohou pomoci: poloměr Slunce = $7 \cdot 10^5$ km, poloměr Neptunu = $2.2 \cdot 10^4$ km, střední vzdálenost od Slunce = $4.5 \cdot 10^9$ km, $T_S = 6000$ K, sluneční konstanta = 1.4 kW/m^2 , Stefan-Boltzmanova konstanta = $5.7 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$.

4. Dvojhadinový systém

Systém sestávající ze dvou energetických hladin E_0 a E_1 je obsazen N částicemi při teplotě T . Částice obsazují energetické hladiny na základě klasického rozdělení.

- (a) Určete výraz pro střední energii připadající na částici.
- (b) Spočítejte střední energii připadající na jednu částici pro teploty $T \rightarrow 0$ a $T \rightarrow \infty$.
- (c) Odvoďte výraz pro tepelnou kapacitu systému N částic.
- (d) Odvoďte výraz pro tepelnou kapacitu systému N částic pro limity $T \rightarrow 0$ a $T \rightarrow \infty$.

5. Tepelná kapacita molekulového plynu

Tři nejnižší energetické hladiny jisté molekuly jsou $E_1 = 0$, $E_2 = \varepsilon$, $E_3 = 10\varepsilon$. Ukažte, že pro dostatečně nízké teploty (jak nízké) pouze hladiny E_1, E_2, E_3 jsou obsazeny. Najděte střední energii molekul za teploty T . Najděte příspěvky energetických hladin k molární tepelné kapacitě c_V a vyjádřete c_V jako funkci T .

6. Energie molekulového plynu

Když dvouatomová molekula vibruje, její moment hybnosti závisí na malém příspěvku jejího vibračního stavu. Důsledkem je, že rotační a vibrační pohyb nejsou kompletně nezávislé. Za vhodných podmínek může být energetické rotačně-vibrační spektrum aproximováno ve tvaru

$$E_{n,l} = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1) + \alpha l(l+1) \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (1)$$

kde první dva členy odpovídají vibračnímu a rotačnímu pohybu a poslední člen je malá korekce vycházející ze závislosti vibrací a rotací. Různé molekulární konstanty splňují

$$\hbar\omega \gg \frac{\hbar^2}{2I} \gg \alpha. \quad (2)$$

Spočítejte energii ideálního plynu z dvouatomových molekul, jehož teplota leží v intervalu

$$\hbar\omega \gg T \gg \frac{\hbar^2}{2I}.$$

7. Stavová rovnice Fermiho plynu

Uvažujme ideální Fermiho plyn s disperzní relací $\varepsilon \propto p^s$, uzavřeném v krabici o objemu V v n -dimenzionálním prostoru. Ukažte, že pro tento systém

$$PV = \frac{s}{n} E, \quad (3)$$

a že rovnice adiabaty (S a N je konstantní) je

$$PV^{1+\frac{\epsilon}{n}} = \text{konst.} \quad (4)$$

Ukažte rovněž, že pro $T \rightarrow \infty$ je tepelná kapacita

$$c_V = \frac{n}{s}N. \quad (5)$$

8. Kdyby byl vesmír obrovská dutina...

Představte si, že vesmír je sférická dutina s poloměrem 10^{28} cm a neprůchodnými stěnami.

- (a) Pokud je teplota uvnitř dutiny 3 K, určete celkový počet fotonů ve vesmíru energii těchto fotonů.
- (b) Pokud by teplota byla 0 K a vesmír obsahoval 10^{80} elektronů ve Fermiho rozdělení, určete Fermiho hybnost těchto elektronů.

9. n-rozměrný vesmír

V našem tří-rozměrném vesmíru známe následující výsledky ze statistické fyziky a termodynamiky

- (a) Hustota energie záření černého tělesa závisí na teplotě jako T^α , kde $\alpha = 4$.
- (b) Poměr tepelné kapacity za konstantního tlaku a tepelné kapacity za konstantního objemu je v jednoatomovém plynu roven $\gamma = 5/3$.

Odvoďte analogické výsledky (mj. i co jsou γ , α a β) ve vesmíru o n rozměrech.