

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ ①

U, V vektorové prostory $\varphi: U \rightarrow V$ lineární

$$\left. \begin{array}{l} 1) \varphi(u+r) = \varphi(u) + \varphi(r) \\ 2) \varphi(au) = a\varphi(u) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \varphi(au+br) = a\varphi(u) + b\varphi(r)$$

Lineární izomorfismus $\varphi: U \rightarrow V$ je lineární a
 bijekce.

Plati $\dim U = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$

φ je izo

φ je proste, $\dim \ker \varphi = \dim \{ \vec{0} \}$ φ je na, $\operatorname{Im} \varphi = V$.

L (2)

2 proprietà da dimostrare

$$\dim U = \dim \ker \varphi = \dim V.$$

Lemma. Modulo $\varphi: U \rightarrow V$ lineari isomorfismo. Per inverso
solamente $\varphi^{-1}: V \rightarrow U$ lineari.

Dk:

$$v_1, v_2 \in V, a, b \in \mathbb{K} \quad \varphi^{-1}(v_1) = u_1, \quad \varphi^{-1}(v_2) = u_2 \Leftrightarrow \varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_2) = v_2$$

$$\varphi^{-1}(av_1 + bv_2) = au_1 + bu_2$$

$$\varphi(au_1 + bu_2) = a\varphi(u_1) + b\varphi(u_2) = \underline{av_1 + bv_2}$$

$$\text{Proto } \underline{\varphi^{-1}(av_1 + bv_2)} = au_1 + bu_2 = \underline{a\varphi^{-1}(v_1) + b\varphi^{-1}(v_2)}$$

(3)

Příklad $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\varphi(x) = Ax$ A je matice $n \times m$

φ je izomorfismus, právě když A má inverzní matici.

Pak $\varphi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $\varphi^{-1}(x) = A^{-1}x$.

Důk: Nechť A má inverzní matici A^{-1}

Pak $\varphi(x) = Ax$ je bijekce s inverzí $\varphi^{-1}(x) = A^{-1}x$.

$$\varphi^{-1}(\varphi(x)) = A^{-1}(Ax) = x$$

$$\varphi(\varphi^{-1}(x)) = A(A^{-1}x) = x$$

Nechť φ má inverzní rozhodnutí. Na ním, je lineární, podle φ trau
 $\varphi^{-1}(x) = Bx$.

(1)

$$(BA)x = B(Ax) = \varphi^{-1}(\varphi(Ax)) = Ax \Rightarrow BA = E = A \cdot B$$

$$(AB)x = A(Bx) = \varphi(\varphi^{-1}(Bx)) = Bx$$

Tedy $B = A^{-1}$.

Skládání lin. zobrazení

Lemma: Necht' $\varphi: U \rightarrow V$ a $\psi: V \rightarrow Z$ jsou lin. zobrazení.

Pak jejich složení $\psi \circ \varphi: U \rightarrow Z$ je rovněž lineární.

Dk: Jednoduchý, udělejte si sami

(5)

Príklad . $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p$

$$\varphi(x) = Ax \quad , \quad \psi(y) = By$$

$$\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(Ax) = B(Ax) = (BA)x$$

Složené zobrazení je zobrazením zadaným maticemi A, B
je zadaná matice, která je rovnicem $B \cdot A$.

⑥

MATICE LIN. ZOBRAZENÍ

Viděli jsme, že každá matice zadává lin. zobrazení

Teď budeme postupovat obráceně. K zobrazení
najdeme matici

$\varphi: U \rightarrow V$ lin. zobrazení

$\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ báze prostoru U

$\beta = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ báze prostoru V

Matice lin. zobrazení φ v bazích α, β — označeni $(\varphi)_{\beta, \alpha}$
získáme takto:

$$\textcircled{7} \\ (\varphi)_{B, \alpha} = \left(\begin{array}{cccc} (\varphi(u_1))_{\beta} & (\varphi(u_2))_{\beta} & \dots & (\varphi(u_n))_{\beta} \end{array} \right)$$

↑
saviadnice $\varphi(u_i)$

n bazi β

1. sloupec matice

Saviadnice vektoru $\varphi(u_1)$ je

$$(\varphi(u_1))_{\beta} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi(u_1) &= a_{11}N_1 + a_{21}N_2 + \dots + a_{k1}N_k \\ &= (N_1 \ N_2 \ \dots \ N_k) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}^k \end{aligned}$$

$$\varphi(u_2) = (N_1 \ N_2 \ \dots \ N_k) \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}, \text{ add } \varphi(u_m) = (N_1 \ N_2 \ \dots \ N_k) \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{km} \end{pmatrix}$$

$$\left(\varphi(u_1) \ \varphi(u_2) \ \dots \ \varphi(u_n) \right) = (N_1 \ N_2 \ \dots \ N_k) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad \boxed{\left(\varphi(u_1) \ \varphi(u_2) \ \dots \ \varphi(u_n) \right) = (N_1 \ N_2 \ \dots \ N_k) (\varphi)_{\beta, \alpha}}$$

Navic plati: $\forall u \in U$

$$(2) \quad (\varphi(u))_{\beta} = (\varphi)_{\beta, \alpha} \cdot (u)_{\alpha}$$

⑨

Ukažeme prvně, že (2) platí pro vektory u z báze α .

$$u = u_1 \quad (\varphi(u_1))_{\mathcal{B}} = (\varphi)_{\mathcal{B}, \alpha} \cdot (u_1)_{\alpha} = (\varphi)_{\mathcal{B}, \alpha} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \text{1. sloupec matice } (\varphi)_{\mathcal{B}, \alpha}$$

1. sloupec byl definován právě jako $(\varphi(u_1))_{\mathcal{B}}$.

Pro obecní u $(u)_{\alpha} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$

$$(\varphi(u))_{\mathcal{B}} = (\varphi(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n))_{\mathcal{B}} = (x_1 \varphi(u_1) + x_2 \varphi(u_2) + \dots + x_n \varphi(u_n))_{\mathcal{B}} =$$

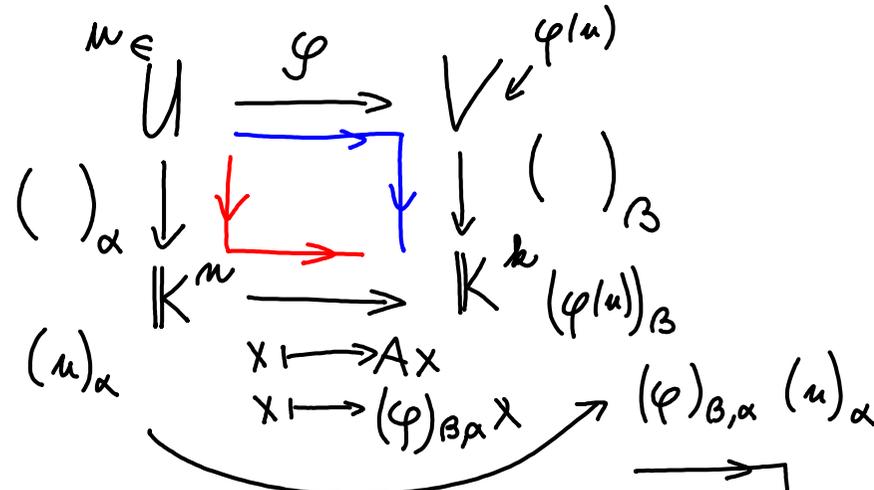
$$= x_1 (\varphi(u_1))_{\mathcal{B}} + x_2 (\varphi(u_2))_{\mathcal{B}} + \dots + x_n (\varphi(u_n))_{\mathcal{B}} = \left((\varphi(u_1))_{\mathcal{B}} \ (\varphi(u_2))_{\mathcal{B}} \ \dots \ (\varphi(u_n))_{\mathcal{B}} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (\varphi)_{\mathcal{B}, \alpha} \cdot (u)_{\alpha}$$

(10)

Jinyj pogled na formulu (2)

$$(\varphi(u))_{\beta} = (\varphi)_{\beta, \alpha} \cdot (u)_{\alpha}$$



$$A = (\varphi)_{\beta, \alpha}$$

$(\varphi(u))_{\beta}$ je cesta v diagramu

$(\varphi)_{\beta, \alpha} \cdot (u)_{\alpha}$ je cesta v diagramu

Obe ceste daji
 slejnj' nj'sledok
 Diagram je komutativni

11

Příklad $U = \mathbb{R}_3[x]$ $\alpha = (1, x, x^2, x^3)$

$V = \mathbb{R}_2[x]$ $\beta = (1, x, x^2)$

$\varphi : U \rightarrow V$ $\varphi(p) = p'$ polynomu přiřadíme jeho derivaci

Jaká je matice $(\varphi)_{\beta, \alpha}$?

Počítáme podle definice:

$$\varphi(1) = (1)' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$\varphi(x) = (x)' = 1 = \underline{1} \cdot 1 + \underline{0} \cdot x + \underline{0} \cdot x^2$$

$$\varphi(x^2) = (x^2)' = 2x = \underline{0} \cdot 1 + \underline{2} \cdot x + \underline{0} \cdot x^2$$

$$\varphi(x^3) = (x^3)' = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2$$

$$(\varphi)_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(12)

Overime na tomto príkladu formulu (2)

$$(\varphi(p))_{\mathcal{B}} = (\varphi)_{\mathcal{B}, \mathcal{A}} (p)_{\mathcal{A}}$$

$$p = 2x^3 - 8x^2 + 6x - 1 = \underline{(-1)} \cdot 1 + \underline{6} \cdot x + \underline{(-8)} x^2 + \underline{2} \cdot x^3$$

$$(p)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(p) = p' = 6x^2 - 16x + 6 = 6 \cdot 1 + (-16) \cdot x + 6 \cdot x^2$$

$$(\varphi(p))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -16 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\mathcal{B}, \mathcal{A}} (p)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -16 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -16 \\ 6 \end{pmatrix} = (\varphi(p))_{\mathcal{B}}$$

13

Věta o počítání s maticemi zobrazení

(1) $\text{id} : U \rightarrow U$, α je báze v U , potom $(\text{id})_{\alpha, \alpha} = E$.

(2) $\varphi : U \rightarrow V$, $\psi : V \rightarrow Z$, α je báze v U , β je báze v V , γ je báze v Z . Potom platí

$$(\psi \circ \varphi)_{\gamma, \alpha} = (\psi)_{\gamma, \beta} \cdot (\varphi)_{\beta, \alpha} \quad \psi \circ \varphi : U \rightarrow Z$$

(3) $\varphi : U \rightarrow V$ je lin. izomorfismus, α báze v U , β báze v V
 ve V pak

$$(\varphi^{-1})_{\alpha, \beta} = \left[(\varphi)_{\beta, \alpha} \right]^{-1} \quad \varphi^{-1} : V \rightarrow U$$

14

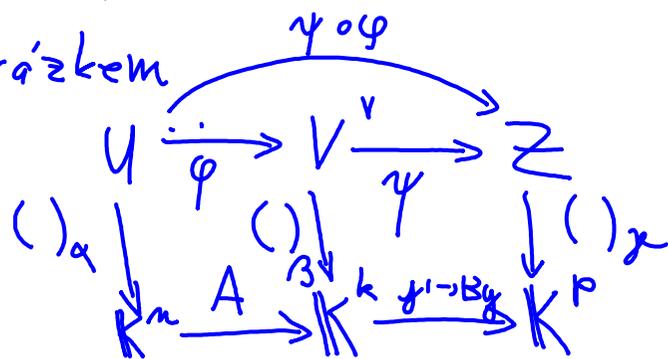
Důkaz (1) $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

$$\begin{aligned} (id)_{\alpha, \alpha} &= \left((id(u_1))_{\alpha}, (id(u_2))_{\alpha}, \dots, (id(u_n))_{\alpha} \right) = \left((u_1)_{\alpha}, (u_2)_{\alpha}, \dots, (u_n)_{\alpha} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

(2) Ještě k pozírání:

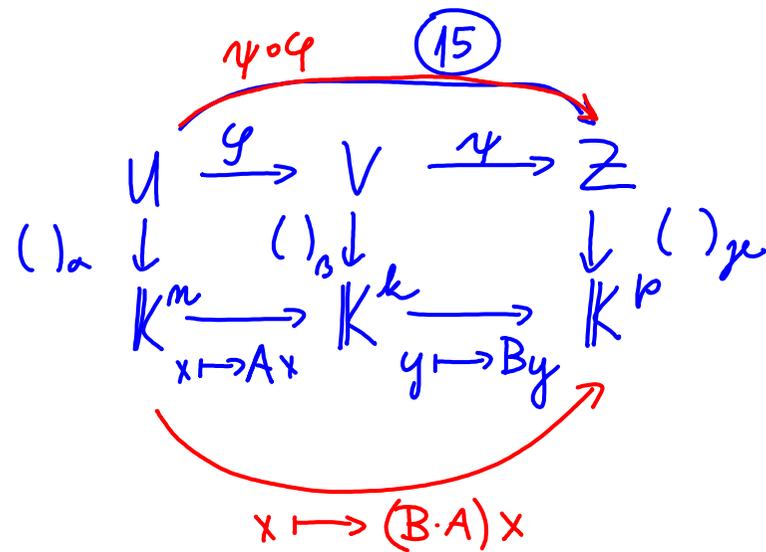
(2) $(\varphi(u))_{\beta} = (\varphi)_{\beta, \alpha} (u)_{\alpha}$
počere se

Důkaz obrázkem

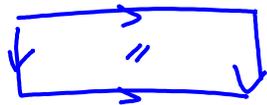


$$(\varphi)_{\beta, \alpha} = A$$

$$(\psi)_{\gamma, \beta} = B$$



Oba číselce komutují. Proto komutuje i složený obdélník.



Tedy to, co je dole, je matice zobrazení

$(\psi \circ \varphi)$ v bázích

Tedy

$$(\psi \circ \varphi)_{\beta, \alpha} = B \cdot A = (\psi)_{\gamma, \beta} \cdot (\varphi)_{\beta, \alpha}$$

(16)

Príklad $U = V = \mathbb{R}^2$, $\varepsilon = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - 2x_2 \\ 4x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\varepsilon, \varepsilon} = \left(\left(\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{\varepsilon}, \left(\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)_{\varepsilon} \right) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \left(\left(\varphi(u_1) \right)_{\alpha}, \left(\varphi(u_2) \right)_{\alpha} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

neboť

$$\varphi(u_1) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot u_1 = \underline{3} \cdot u_1 + \underline{0} \cdot u_2$$

$$\varphi(u_2) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot u_2 = \underline{0} \cdot u_1 + \underline{1} \cdot u_2$$

$$\alpha = (u_1, u_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

(17)

Formulka (2)

$$(\varphi(u))_{\alpha} = (\varphi)_{\alpha, \alpha} (u)_{\alpha}$$

$$(u)_{\alpha} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi(u))_{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Předpis pro zobrazení φ v \mathbb{K} souřadnicích báze α je.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$