OPERACE S MATICEMI

Matice A typu $\underline{n \times k}$ je tabulka reálných nebo komplexních čísel s n řádky a k sloupci

$$A = (A_{ij}) \qquad A_{ij}$$

i-tý řádek   j-tý sloupec

Matice 2×3

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

2

Řádek je matice $1\times k$ $\qquad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_k \end{pmatrix}$

Sloupec je matice $n\times 1$ $\qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

SČÍTÁNÍ MATIC: Nechť A a B jsou dvě matice typu $n\times k$, jejich součet je matice stejného typu, značíme ji $A+B$

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 1 & 16 & 15 \end{pmatrix}$$

③

$\mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{K})$ ... matice typu $n \times k$ s prvky v $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$+ : \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{K})$$

$$(A, B) \longmapsto A + B$$

Sčítání matic je komutativní, asociativní, má nulový prvek

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

a ke každému prvku existuje opačný

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots \\ & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

4

Násobení matice číslem z $\mathbb{K}$ A je matice $n \times k$, $c \in K$, pak $c \cdot A$ je matice $n \times k$

$$(cA)_{ij} = c \cdot A_{ij}$$

$$(Ac)_{ij} = A_{ij}\, c$$

Vlastnosti:

$$d(cA) = (dc)A \qquad 1 \cdot A = A$$

$$c(A+B) = (cA) + (cB)$$

$$(c+d)A = (cA) + (dA)$$

5

NÁSOBENÍ MATIC

Motivace: Mějme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots \quad \dots \quad & \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

$ax = b$

a tu bychom rádi zapsali pomocí násobení

$$A \cdot x = b$$

kde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$ je typu $k \times n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$

6

Součin řádku $1\times n$ se sloupcem $n\times 1$ je matice 1×1, číslo.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + \dots + a_nc_n = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \qquad \cancel{\sum_{i=1}^{n}}$$

Součin matice $k\times n$ se sloupcem $n\times 1$.

$$A\cdot c = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_2(A) \\ \vdots \\ r_k(A) \end{pmatrix} \cdot c = \begin{pmatrix} r_1(A)\cdot c \\ r_2(A)\cdot c \\ \vdots \\ r_k(A)\cdot c \end{pmatrix}$$

řádky matice A

sloupec

7

$$A \cdot c = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n \\ \dots \\ a_{k1}c_1 + a_{k2}c_2 + \dots + a_{kn}c_n \end{pmatrix}$$

A matice $k \times n$, c je sloupec $n \times 1$, Ac je sloupec $k \times 1$

k/n $\quad n/1 \quad k/1 = k/n \cdot n/1$

$$(A \cdot c)_i = a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \dots + a_{in}c_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_k$$

(8)

A je matice $k \times n$, B je matice $n \times p$. Potom $A \cdot B$ je matice $k \times p$.

$$k/n \qquad n/p \qquad k/n \cdot n/p = k/p$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_2(A) \\ \vdots \\ r_k(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(B) & s_2(B) & \dots & s_p(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1(A)\cdot s_1(B) & r_1(A)\, s_2(B) & \dots \\ r_2(A)\, s_1(B) & r_2(A)\, s_2(B) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ r_k(A)\, s_1(B) & r_k(A)\, s_2(B) & \dots \end{pmatrix}$$

$$A = (A_{ij}) \qquad B = (B_{st})$$

$$(A \cdot B)_{ij} = r_i(A) \cdot s_j(B) = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{in}B_{nj}$$
$$= \sum_{s=1}^{n} A_{is} B_{sj}.$$

9

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 18 & 9 \\ 2 & 36 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = s_1(A)$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = s_1(A)$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

10

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = s_2(A)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 5 & -2 \\ 6 & 8 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} A = r_1(A)$$

$$(0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \dots, 0) \cdot A = r_i(A)$$

A matice $k \times n$

E_n je matice $n \times n$ tvaru

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$ jednotková matice $n \times n$

$$A \cdot E_n = A$$

(11)

A matice $k \times n$, E_k je matice $k \times k$

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Matice tvaru $k \times k$ (nebo $n \times n$) nazýváme čtvercové.

$$\underset{k/k \;\cdot\; k/n}{E_k \cdot A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_2(A) \\ \vdots \\ r_k(A) \end{pmatrix} = A$$

(12)

Vlastnosti násobení.

(1) není komutativní

$A \cdot B$ ... počet sloupců A = počet řádků B

$B \cdot A$ ... počet sloupců B = počet řádků A

A rozměry $k \times n$

B rozměry $n \times k$

$A \cdot B$ je matice $k \times k$

$B \cdot A$ je matice $n \times n$

O rovnosti má smysl mluvit jenom tehdy, když $n = k$, tedy A i B jsou stejného tvaru čtvercové matice.

(13)

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$$

(2) Násobení je asociativní

$$(A\,B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C),$$

$$k/s \qquad k/n \cdot n/p \cdot p/s \qquad k/n \quad \underbrace{n/p \quad p/s}_{n/s} \qquad k/s$$

kdykoli má násobení smysl

14

(3) Distributivita vzhledem ke sčítání

$$\underbrace{\underset{k/n}{A}\cdot\underbrace{(\underset{n/p}{B}+\underset{n/p}{C})}_{n/p}}_{k/p} = (A\cdot B)+(A\cdot C)$$

$$\big(A\,(B+C)\big)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,(B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,(B_{kj}+C_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(A_{ik}B_{kj}+A_{ik}C_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{n} A_{ik}C_{kj} = (A\cdot B)_{ij}+(A\cdot C)_{ij}$$

$$= (AB + A\cdot C)_{ij}$$

15

Mnożenie kwadratowych macierzy $n \times n$ nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$\cdot : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \times Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$$
$$(A, B) \longmapsto A\cdot B$$

To mnożenie ma jednostkowy element

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot E_n = A = E_n A$$

(16)

<u>Inverzní matice</u> k matici $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ je matice $B \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ taková, že

$$A \cdot B = B \cdot A = E_n$$

Výhoda. Rovnice

$$A\, x = b \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Má-li A inverzní matici B, pak

$$B \cdot (A x) = B \cdot b$$
$$(B \cdot A) \cdot x = B \cdot b$$
$$E_n \cdot x = B \cdot b$$
$$x = B \cdot b$$

$$a x = b \qquad a \neq 0$$
$$\frac{1}{a} \cdot (a x) = b$$
$$x = \frac{b}{a} = \frac{1}{a} \cdot b$$

17

- čtvercová matice nemusí mít inverzní matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ nemá inverzní}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}+b_{12} & 2b_{11}+2b_{12} \\ b_{21}+b_{22} & 2b_{21}+2b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & 2s_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transponovaná matice

A je matice $\underline{k \times n}$, pak transponovaná matice A^T je matice $\underline{n \times k}$

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

18

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Platí:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$\underbrace{k/n \quad n/p}_{k/p} \qquad\qquad p/n \quad n/k$$

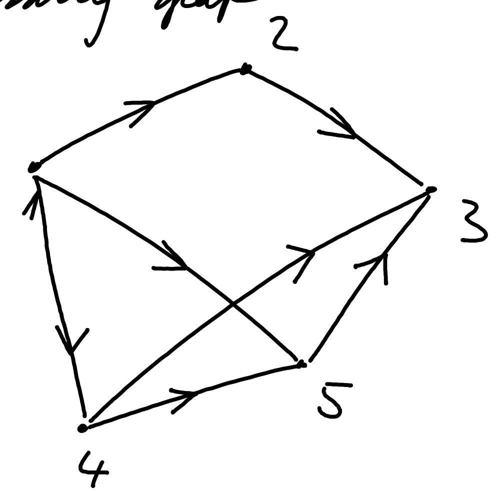
$$p/k \qquad\qquad p/k$$

Domácí úloha – dokázat rovnost podle definic

19

Jak lze aplikovat násobení

Orientovaný graf



uzly .. množina $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

orientované hrany jsou uspořádané dvojice

$\{(4,5), (1,5), (1,2), (2,3)\}$

Graf lze zadat také maticí A

$A_{ij} = 1$ pokud z i do j vede hrana

$\phantom{A_{ij} = {}} 0$ jinak

20

Matice pro náš graf je

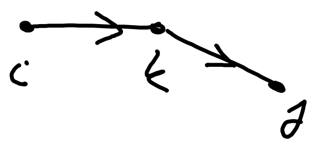
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ & & & & \\ \end{pmatrix}$$

Cesta délky 2

Dvojice hran

$(i\,k)\ (k\,j)$



Počet cest délky 2 v našem grafu z i do j.

To lze spočítat pomocí násobení matic takto

$(A \cdot A)_{ij}$ = počet cest délky 2 z i do j.

21

Důkaz:

$$(A \cdot A)_{ij} = A_{i1}A_{1j} + A_{i2}A_{2j} + A_{i3} \cdot A_{3j} + \dots + A_{in}A_{nj}$$

$A_{ik}A_{kj} = 1$ právě když $A_{ik} = A_{kj} = 1$

existuje cesta z i do k a z k do j

0 jinak $A_{ik} = A_{kj} = 0$

neexistuje cesta z i do j přes k

$A_{ik} = 1, \; A_{kj} = 0$

neexistuje cesta z i do j přes k

22

Jakou informaci dostaneme se součinu

$$A \cdot A \cdot A = A^3 \;?$$