(1) Lin. obal a lin. nezávislost

Vekt. prostor U $\quad + : U \times U \longrightarrow U$

$\qquad\qquad\qquad\quad \cdot \; \mathbb{K} \times U \longrightarrow U$

Vekt. podprostor $\emptyset \neq V \subset U$

(1) $\forall v_1, v_2 \in V \quad v_1 + v_2 \in V$

(2) $\forall a \in \mathbb{K}, \forall v \in V \quad a v \in V$

Potom každý vekt. podprostor je vekt. prostorem

Lineární obal vektorů

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$. Nechť $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$.

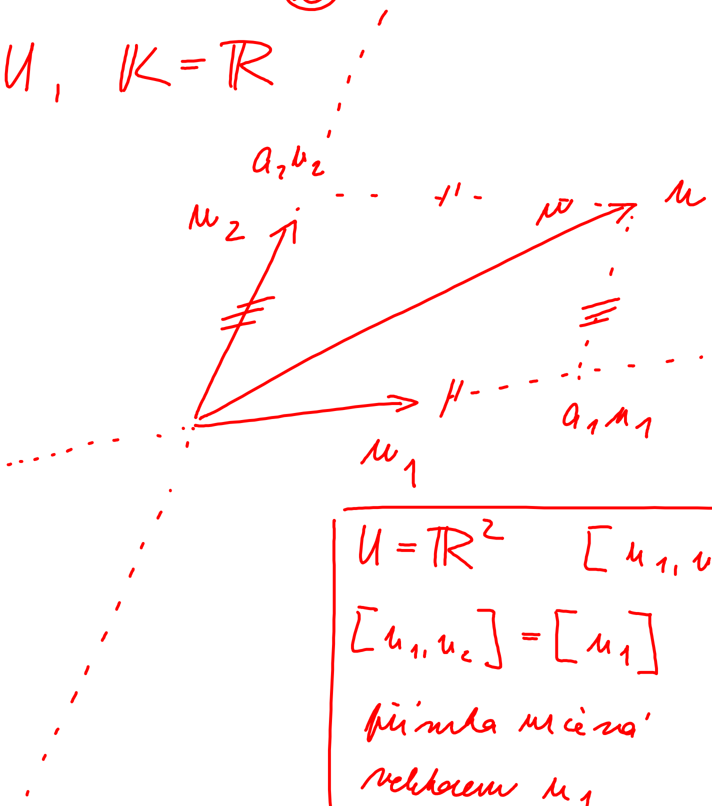
$$[u_1, u_2, \dots, u_k] = \{ a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k \in U ; \; a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K} \}$$

2

Příklad: $\mathbb{R}^2 = U$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$[u_1, u_2]$

$= \{a_1 u_1 + a_2 u_2\}$



$u = a_1 u_1 + a_2 u_2$

$a_1 u_1 \in [u_1, u_2]$

$a_2 u_2 \in [u_1, u_2]$

$[u_1, u_2] = \mathbb{R}^2$

$U = \mathbb{R}^2$ $\quad [u_1, u_2]$ $\quad u_2 = k u_1$

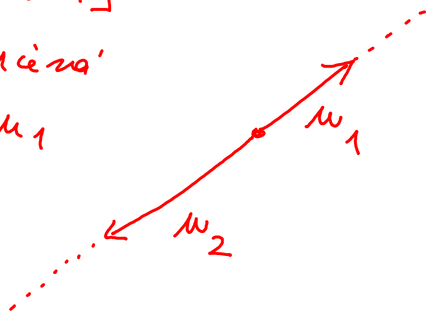
$[u_1, u_2] = [u_1]$

přímka určená vektorem u_1

$a_1 u_1 + a_2 u_2 =$

$= a_1 u_1 + a_2 k u_1 =$

$= (a_1 + a_2 k) u_1$



3

Jako součást definice položíme $[\emptyset] = \{\vec{o}\}$

Věta. Každý lin. obal je vekt. podprostor.

Důkaz: $V = [u_1, u_2, \dots u_k] \subseteq U$

$\vec{O} \in V$ $\quad \vec{O} = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0\, u_k$ $\quad$ tedy V je neprázdná

Jestliže $v, w \in V$, pak $v + w \in V$

$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k$
$w = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_k u_k$ $\in V$

$v + w = (a_1 + b_1) u_1 + (a_2 + b_2) u_2 + \dots + (a_k + b_k) u_k \in V$

Jestliže $v \in V$, $a \in \mathbb{K}$, pak $a v \in V$ Důkaz je analogický.

4

Lin. závislost a nezávislost vektorů

Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ jsou lineárně závislé, jestliže

$$\exists (a_1, a_2, \dots, a_k) \in K^k \neq (0, 0, \dots, 0) \text{ tak, že}$$

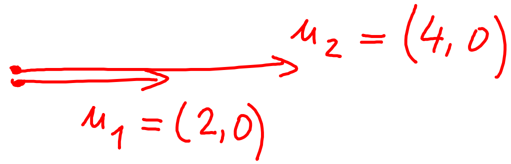
$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{o}.$$

Odečítání vektorů

$$u - v = u + (-v)$$

Příklady:

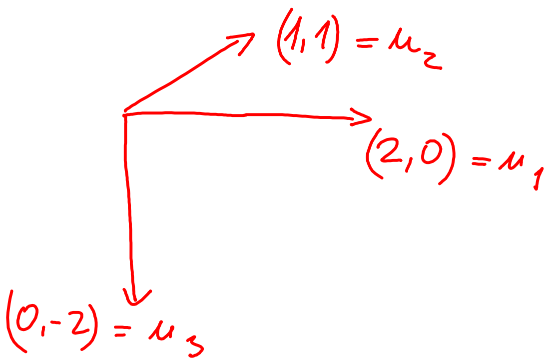
(1) $U = \mathbb{R}^2$



$$2u_1 + (-1)u_2 = 2\cdot(2,0) - 1\cdot(4,0) = (4,0) - (4,0) = (0,0) = \vec{o}$$

5

Příklad $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^2$



$$\left(-\frac{1}{2}\right)u_1 + 1\cdot u_2 + \frac{1}{2}u_3 = -\frac{1}{2}(2,0) + 1\cdot(1,1) + \frac{1}{2}(0,-2) =$$
$$= (-1,0) + (1,1) + (0,-1) = (0,0) = \vec{o}$$

Jsou lin. závislé!

$$u_2 = \frac{1}{2} u_1 - \frac{1}{2} u_3$$

6

Věta Vektory $u_1, u_2, \dots u_k \in U$ jsou lin. závislé právě když jeden z nich lze napsat jako lin. kombinaci ostatních.

Důkaz:

$\Leftarrow$ nechť $u_p = a_1 u_1 + \dots + a_{p-1} u_{p-1} + a_{p+1} u_{p+2} + \dots + a_k u_k$

Potom

$$a_1 u_1 + \dots + a_{p-1} u_{p-1} + (-1) u_p + a_{p+1} u_{p+1} + \dots + a_k u_k = \vec{o}$$

přičemž $(a_1, \dots a_{p-1}, -1, a_p, \dots a_k) \neq (0, 0, \dots 0)$

7

($\Rightarrow$) Nechť $\exists (a_1, a_2, \dots a_k) \neq (0, 0, \dots 0)$, tak, že

$$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = \vec{o}$$

Nechť $a_p \neq 0$. Potom

$$a_p u_p = - a_1 u_1 - \dots - a_{p-1} u_{p-1} - a_{p+1} u_{p+1} - \dots - a_k u_k$$

Vynásobíme číslem $\frac{1}{a_p}$:

$$u_p = - \frac{a_1}{a_p} u_1 - \dots - \frac{a_{p-1}}{a_p} u_{p-1} - \frac{a_{p+1}}{a_p} u_{p+1} - \dots - \frac{a_k}{a_p} u_k$$

Tedy u_p je lin kombinací ostatních.

8

Definice lin. nezávislosti

Vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$ jsou lin. nezávislé, jestliže $\forall (a_1, a_2, \ldots a_k) \in \mathbb{K}$ platí implikace

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k = \vec{O} \implies a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0.$$

Jinými slovy. Uvažujme rovnici

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k = \vec{O}$$

s neznámými $a_1, a_2, \ldots a_k \in \mathbb{K}$. Vektory $u_1, u_2, \ldots u_k$ jsou lin. nezávislé, jestliže tato rovnice má pouze triviální řešení $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$.

9

Příklad: Zjistěte, zda vektory

$u_1 = (1,2,1,0)^T$, $u_2 = (1,1,-1,2)^T$, $u_3 = (1,0,1,1)^T \in \mathbb{R}^4$

jsou lin. závislé nebo nezávislé.

Uvažujme rovnici v neznámých $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = \vec{O}$$

$$a_1 (1,2,1,0)^T + a_2 (1,1,-1,2)^T + a_3 (1,0,1,1)^T = (0,0,0,0)^T$$

Rozepíšeme ve složkách

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ 2a_1 + a_2 &= 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 &= 0 \\ 2a_2 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dostáváme homogenní soustavu lin. rovnic.

10

Matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \end{array}$$

Závěr: vektory u_1, u_2, u_3 jsou lin. nezávislé.

(Souřadnice vektorů u_1, u_2, u_3 tvoří sloupce matice soustavy)

<u>ÚLOHA</u>: Zjistěte, zda daný vektor u leží v lineárním obalu vektorů $u_1, u_2, \ldots u_k$. To znamená, že musíme zjistit, zda existují $a_1, a_2, \ldots a_k \in \mathbb{K}$ tak, že $u = a_1u_1 + \ldots + a_k u_k$

(11)

Máme rovnice

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = u$$

v neznámých $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ řešení?

Konkrétně. $U = Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Řešíme soustavu

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

12

Tato rovnice vede na soustavu 4 lineárních rovnic o 2 neznámých

tak, že porovnáme složky matic v i-tém ~~a j-té~~ řádku a j-tém sloupci

$ij = 11$	$a_1 + = 1$	$a_1 = 1$
$ij = 12$	$2a_1 + 2a_2 = 2$	$2a_1 + 2a_2 = 2 + 6 = 8 \neq 2$
$ij = 21$	$a_2 = 3$	$a_2 = 3$
$ij = 22$	$a_1 + a_2 = 4$	

Soustava nemá řešení, proto

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \notin \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

13

Řekneme, že vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ generují prostor U, jestliže jejich lineární obal je roven prostoru U

$$[u_1, u_2, \dots, u_k] = U$$

Jinými slovy: každý vektor z U je lineární kombinací vektorů $u_1, u_2, \dots, u_k$, tj.

$$(\forall u \in U)\ \exists (a_1, a_2, \dots a_k) \in \mathbb{K}^k \qquad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k$$

<u>Speciálně:</u> $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ generují $\mathbb{R}^2$

$$\underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\Uparrow}{(x_1, x_2)}} = x_1(1,0) + x_2(0,1) = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

V $U=\mathbb{R}^3$ vektory $u_1=(1,0,0)$ a $u_2=(0,1,0)$ negenerují tento prostor.
Vektor $(1,1,1)$ nemohu zapsat jako jejich lin. kombinaci.

Vektorový prostor U nad $\mathbb{K}$ se nazývá konečně dimenzionální, jestliže existuje konečná množina vektorů $u_1, u_2, \dots u_k$, která ho generuje, tj.

$$[u_1, u_2, \dots u_k] = U$$

Příklady. $\mathbb{R}^3$ je konečnědimenzionální, neboť

$$[(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] = \mathbb{R}^3$$

$Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ je konečnědimenzionální $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right] = Mat_2$

15

Příklad Vekt. prostor všech polynomů nad $\mathbb{R}$ ... $\mathbb{R}[x]$ není konečně dimensionální.

Kdyby $p_1, p_2, \ldots p_k$ generovaly $\mathbb{R}[x]$, vezmeme polynom stupně

$$\max(\text{st}\, p_1, \text{st}\, p_2, \ldots \text{st}\, p_k) + 1$$

Ten nelze napsat jako lin. kombinace $p_1, p_2, \ldots, p_k$

Příklad $C[0,1]$ je vekt. prostor, který není konečnědimensionální

Příklad Polynomy stupně nejvýše n .... $\mathbb{R}_n[x]$ tvoří vekt. prostor, který je konečnědimensionální je totiž generován polynomy

$$1, x, x^2, \ldots x^n$$

(16)

Báze konečnědimenzionálního prostoru U nad $\mathbb{K}$ je

posloupnost vektorů $u_1, u_2, \dots, u_n$, která má tyto vlastnosti

(1) $u_1, u_2, \dots u_n$ jsou lineárně nezávislé

(2) $\forall u \in U \ \exists a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{K}$

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

(vektory $u_1, u_2, \dots u_n$ generují U).

Příklady: $\mathbb{R}^3$ $e_1 = (1,0,0)^T$, $e_2 = (0,1,0)^T$, $e_3 = (0,0,1)^T$

je báze $\mathbb{R}^3$, tzv. standardní

(1) lin. nezávislé $a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = \vec{0}$

$a_1 = 0$
$a_2 = 0$ $\Rightarrow$ LN
$a_3 = 0$

(17)

generuje $\mathbb{R}^3$, neboť $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$.

$\mathbb{R}^3$ má spoustu jiných bazí: např. $u_1 = (1,0,1)^T$, $u_2 = (0,1,1)^T$, $u_3 = (0,0,1)^T$

Lin. nezávislost:

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} a_1 = a_2 = a_3 = 0 \\ LN \end{array}$$

Generuje $\mathbb{R}^3$. Řešíme soustavu s neznámými $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ a parametry $(p_1, p_2, p_3)^T \in \mathbb{R}^3$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a_1 &= p_1 \\ a_2 &= p_2 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= p_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_1 &= p_1 \\ a_2 &= p_2 \\ a_3 &= p_3 - p_1 - p_2 \end{aligned}$$

18

Báze $\mathbb{R}_3[x]$ ... ... $1, x, x^2, x^3$

Báze $Mat_{2\times 2}[x]$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

LN.

$$a_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

Příště dokážeme:

(1) Každý konečnědim. prostor má bázi.

(2) Každé dvě báze mají stejný počet prvků.

+ užitečný algoritmus