ČTYŘI VĚTY O BÁZI

Věta 1 Nechť U je vekt. prostor na $\mathbb{K}$. Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ jsou lin. nezávislé. Pak $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tvoří bázi prostoru U.

Důkaz: Již víme, že lin. nezávislé vektory lze doplnit na bázi

$$\underbrace{v_1, v_2, \ldots, v_n}_{LN}, \underbrace{u_1, u_2, \ldots, u_k}_{\text{generují } U}$$

Z nich jsme podle věty vybrali lin. nezávislé, které generují U. Toto je báze a ta musí mít n prvků. Takže jsme vybrali $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

-2-

<u>Věta 2</u> Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ a $u_1, u_2, \ldots, u_n$ generují prostor U. Pak $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tvoří bázi prostoru U.

<u>Důkaz sporem</u>

$\emptyset$, $u_1, u_2, \ldots u_n$ generují U

LN

Z těchto vektorů vybereme LN, které generují U. Tj máme bázi a ta musí mít n prvků. Tedy vybereme všechny vektory $u_1, u_2, \ldots, u_n$

Věta 3 Nechť $V \subseteq U$ je podprostor. Je-li U konečně dimensionální, pak V je rovněž konečně dimensionální a

$$\dim_{\mathbb{K}} V \leq \dim_{\mathbb{K}} U .$$

Důkaz: Sporem. Předpokládejme, že V není konečnědimensionální. Nechť $v_1, v_2, \dots v_k \in V$ jsou LN. Protože V není konečnědimensionální, existuje $v_{k+1} \in V \setminus [v_1, v_2, \dots v_k]$. Potom $v_1, \dots v_{k+1}$ jsou LN. Indukcí dokážeme, že existuje nekonečná posloupnost

$$v_1, v_2, \dots, v_k, \dots$$

lin. nezávislých vektorů. Jestliže $\dim_{\mathbb{K}} U = n$, pak máme $v_1, v_2, \dots, v_{n+1} \in U$

-4-

a tyto vektory jsou LN. To je ale ve sporu se Steinitzovou větou.

Platí $\underbrace{v_1, v_2 \dots v_{n+1}}_{LN}$ $\underbrace{u_1, \dots u_n}_{\text{báze } U}$ $v_1 \dots v_{n+1} \in [u_1, \dots u_n] = U$

tedy podle Steinitzovy věty $n+1 \le n$, spor.

Víme-li již, že V má konečnou dimenzi a

$v_1, v_2, \dots v_k$

je báze V, pak tyto LN vektory v U lze doplnit na bázi prostoru U.
Tedy

$$\dim V = k \le n = \dim U.$$

-5-

Věta 4 Nechť $V \leq U$ je podprostor a nechť U je konečnědimensionální

a dim V

Pak $V = U$.

Důkaz: Vezmeme bázi $v_1, v_2, \dots, v_k$ prostoru V a doplníme ji na bázi prostoru U. Protože $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} U$, mají obě báze stejný počet prvků, musí být tedy stejné, a proto

$$V = [v_1, v_2, \dots v_k] = U$$

SOUŘADNICE VEKTORU V DANÉ BÁZI

<u>Věta:</u> Nechť U je konečnědimensionální prostor $u_1, u_2, \dots u_n$ je báze U právě když platí

(*) $\forall u \in U \; \exists ! \, (a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$

<u>Důkaz.</u> Definice báze

(1) $u_1, \dots u_n$ jsou LN

(2) $\forall u \in U \; \exists \, (a_1, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \quad u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$

Musíme dokázat, že

$$(1) \wedge (2) \iff (*)$$

-7-

$(1) \wedge (2) \Rightarrow (*)$

Nechť $u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$

$u = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n$

Odečtením $\vec{o} = (a_1 - b_1) u_1 + \dots + (a_n - b_n) u_n$

Vektory $u_1, \dots u_n$ jsou LN, proto

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n = 0$$

Tedy $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$

$(*) \Rightarrow (1) \wedge (2)$ $\quad (*) \Rightarrow (2)$ zřejmé. Zbývá dokázat, že $u_1, \dots u_n$ jsou LN.

Nechť $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = \vec{o}$

Současně $0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n = \vec{o}$

Podle $(*)$ dostaneme $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.
Tedy $u_1, \dots u_n$ jsou LN.

<u>Definice souřadnic</u> vektoru u v bázi $\alpha=(u_1,u_2,..u_n)$.

Souřadnice vektoru $u \in U$ v bázi $\alpha=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ je n-tice
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$
taková, že

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n.$$

Označení
$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Souřadnice vektorů v bázi α nám zadávají zobrazení

$$(\ )_\alpha : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

Toto zobrazení je bijekce. Inverzní zobrazení je

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longmapsto a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n \in U$$

Navíc toto zobrazení má vlastnosti.

$$u, v \in U \qquad (u+v)_\alpha = (u)_\alpha + (v)_\alpha$$

$$a \in K \qquad (a u)_\alpha = a (u)_\alpha$$

Jestliže $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou LN v U, pak $(v_1)_\alpha, \dots (v_k)_\alpha$ jsou LN v $\mathbb{K}^n$.

Početně to znamená, že pro zjišťování LN a generování nemusíme počítat s vektory, stačí počítat s jejich souřadnicemi v nějaké pevné bázi

<u>Příklad</u> $V = \mathbb{R}_2[x]$ stand. báze $\varepsilon = (1, x, x^2)$

$$(x^2+x-1)_\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Báze $\alpha = (1,\ x-1,\ (x-1)^2)$

$$x^2+x-1 = \underline{\underline{1}}(x-1)^2 + \underline{\underline{3}}(x-1) + \underline{\underline{1}}$$

$$x^2-2x+1 \quad + 3x-3$$

$$(x^2+x-1)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

-11-

PRŮNIK A SOUČET PODPROSTORŮ

Vekt prostor U; $V, W \subseteq U$ vekt podprostory

<u>Lemma</u>: Průnik podprostorů je opět podprostor

<u>Dk</u>. $u_1, u_2 \in V \cap W$

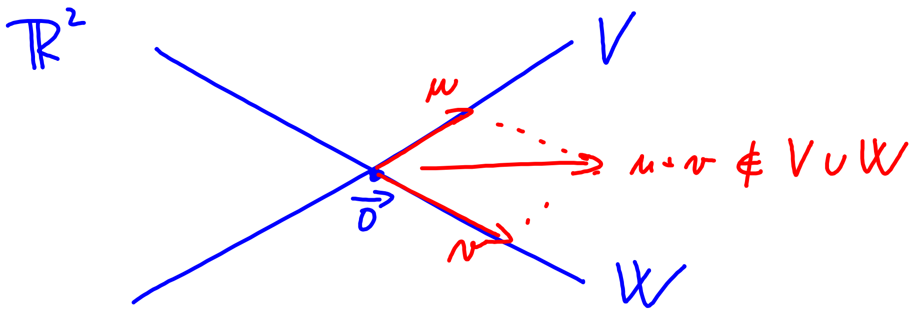
$a_1 u_1 + a_2 u_2 \in V$, neboť V je podprostor

$a_1 u_1 + a_2 u_2 \in W$, neboť W je podprostor

Tedy $a_1 u_1 + a_2 u_2 \in V \cap W$

$\vec{o} \in V \cap W$, závěr: $V \cap W$ je vekt. podprostor.

Sjednocení podprostorů obecně NENÍ podprostor



V lineární algebře je sjednocení nahrazeno SOUČTEM vekt. podprostorů

<u>Definice součtu</u>

$$V+W=\{u\in U;\ \exists v\in V,\ \exists w\in W,\ u=v+w\}$$

<u>Lemma</u> Součet vekt. podprostorů je opět vekt. podprostor

<u>Dk</u>: Předně $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} \in V + W$.

$u_1, u_2 \in V + W$

$u_1 = v_1 + w_1 \qquad v_1 \in V,\ w_1 \in W$

$u_2 = v_2 + w_2 \qquad v_2 \in V,\ w_2 \in W$

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = a_1(v_1 + w_1) + a_2(v_2 + w_2) =$$

$$= \underbrace{(a_1 v_1 + a_2 v_2)}_{\in V} + \underbrace{(a_1 w_1 + a_2 w_2)}_{\in W} \in V + W$$

-14-

<u>Příklad</u> $U = \mathbb{R}^4$

$V = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$

$W = \{ (0, y_2, 0, y_4) \in \mathbb{R}^4 \}$

$V + W = \mathbb{R}^4$

$$\mathbb{R}^4 \ni (x_1, x_2, x_3, x_4) = \underbrace{(x_1, x_2, x_3, -x_1 - x_2 - x_3)}_{\in V} + \underbrace{(0, 0, 0, x_4 + x_1 + x_2 + x_3)}_{\in W}$$

$$= \underbrace{(x_1, -x_1 - x_3 - x_4, x_3, x_4)}_{\in V} + \underbrace{(0, x_2 + x_1 + x_3 + x_4, 0, 0)}_{\in W}$$

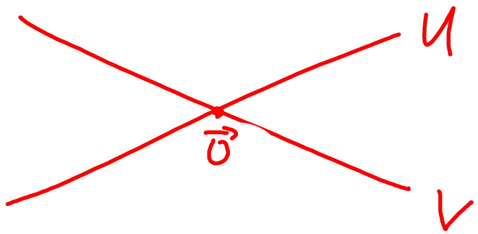
-15-

<u>Definice</u> Součet $V+W$ nazýváme DIREKTNÍ, jestliže

$$V \cap W = \{\vec{o}\}.$$

Zapisujeme $V \oplus W$.

<u>Příklad</u> ① $\mathbb{R}^2$



součet $U+V$ je direktní

② $U=\mathbb{R}^4$, V, W z předchozího příkladu

$$V \cap W = \{(0, y_2, 0, -y_2) \in \mathbb{R}^4\} \neq \{\vec{o}\}$$

Součet $V+W$ zde není direktní

-16-

<u>Věta.</u> Součet podprostorů V a W je direktní, právě když platí

(0) $\quad \forall u \in V+W \;\; \exists!\, v \in V \;\; \exists!\, w \in W \quad u = v + w$

<u>Důkaz.</u> (na příklad $U = \mathbb{R}^4$, V, W – ten dokumentuje tuto větu)

Direktní součet $\Rightarrow$ (0)

Nechť

$$u = v_1 + w$$

$$u = v_2 + w_2$$

Odečteme

$$\vec{o} = v_1 - v_2 + w_1 - w_2$$

$$V \ni v_2 - v_1 = w_1 - w_2 \in W$$

Tedy $v_2 - v_1 = w_1 - w_2 \in V \cap W = \{\vec{o}\}$

$$v_2 - v_1 = w_1 - w_2 = \vec{o}$$

$v_1 = v_2$ a $w_1 = w_2$.

Jednoznačnost v (0).

-17-

Nechť platí (o) a nechť $u \in V \cap W$.

Potom

$$\left.\begin{array}{l} \vec{o} = \underset{\substack{\cap \\ V}}{u} + \underset{\substack{\cap \\ W}}{(-u)} \\[2em] \vec{o} = \underset{\substack{\cap \\ V}}{\vec{o}} + \underset{\substack{\cap \\ W}}{\vec{o}} \end{array}\right\} \text{ podle (o) je } u = \vec{o}.$$

Věta o dimenzi průniku a součtu

Nechť U je konečnědimenzionální prostor, $V, W \subset U$ jeho podprostory. Potom platí

$$\dim_K (V+W) + \dim_K (U \cap V) = \dim_K U + \dim_K V.$$

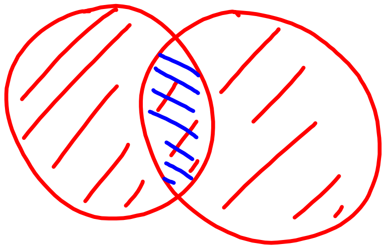
Důkaz příště

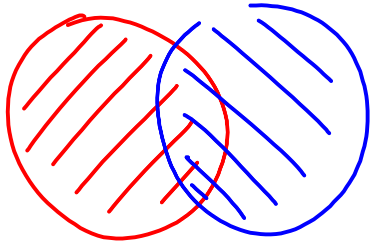
- 18 -

Analogie pro konečné množiny

A, B konečné množiny. $|A|$, $|B|$ .. počet prvků těchto množin

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$$





– 19 –

Počítání součtu podprostorů

Podprostory jsou často zadány jako lin. obaly několika vektorů

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_k] = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k \in U;\ a_i \in \mathbb{K}\}$$

$$W = [w_1, w_2, \dots, w_l] = \{b_1 w_1 + \dots + b_l w_l \in U,\ b_j \in \mathbb{K}\}$$

$$V + W = \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 w_1 + \dots + b_l w_l \in U,\ a_i, b_j \in \mathbb{K}\}$$

$$= [v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_l]$$

Bázi součtu $V+W$ najdeme tak, že z vektorů $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l$ vybereme lin. nezávislé se stejným lin. obalem.

-20-

Počítání průniku podprostorů

$V = [v_1, v_2, v_3]$ $\quad$ $W = [w_1, w_2, w_3]$

$$V \cap W = \{ u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = \underline{b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3} \}$$

Musíme najít řešení soustavy

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3$$

To je homogenní rovnice.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 - b_1 w_1 - b_2 w_2 - b_3 w_3 = \vec{o}$$

Jsou-li např. v $\mathbb{R}^4$, dostáváme soustavu 4 rovnic o 6 neznámých $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$

Nechť řešení této soustavy závisí na 2 parametrech

$$b_3 = s$$
$$b_2 = p$$
$$b_1 = 3p + 2s$$

Dále mi není třeba počítat

$$V \cap W = \{ u = b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3 \} = \{ (3p+2s) w_1 + p w_2 + s w_3 \} =$$

$$= \{ p (\underline{3 w_1 + w_2}) + s (\underline{2 w_1 + w_3}) \} = [3 w_1 + w_2 , \; 2 w_1 + w_3]$$

Dostaneme $V \cap W$ jako lineární obal vektorů $3 w_1 + w_2$, $2 w_1 + w_3$.
Teď už je jednoduché najít bázi $V \cap W$.
Jestliže jsou LN, pak $\dim_K (V \cap W) = 2$. Poznamenejme $\dim V = 3 = \dim W$, pak

$$\dim_K (V + W) = \dim V + \dim W - \dim (V \cap W) = 3 + 3 - 2 = 4.$$