Věta. Lineární zobrazení $\varphi: U \to V$, kde U je prostor konečné dimenze, je jednoznačně určeno svými hodnotami na nějaké bázi prostoru U.

Dk: $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ nějaká báze. $u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$

$$\varphi(u) = \varphi(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n) =$$

$$= a_1 \varphi(u_1) + a_2 \varphi(u_2) + \dots + a_n \varphi(u_n).$$

Tedy hodnota φ na u je určena pouze hodnotami $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)$ a souřadnicemi vektoru u v bázi α.

Věta: Nechť $\varphi: U \to V$ a $\psi: V \to W$ jsou lineární zobrazení. Pak $\psi \circ \varphi: U \to W$ je rovněž lineární.

Věta. Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení a $U_1 \subseteq U$ a $V_1 \subseteq V$ jsou podprostory. Potom

$$\varphi(U_1) = \{ \varphi(u) \in V ;\ u \in U_1 \} \qquad \text{(obraz podprostoru } U_1\text{)}$$

je podprostor ve V a

$$\varphi^{-1}(V_1) = \{ u \in U ;\ \varphi(u) \in V_1 \} \qquad \text{(vzor podprostoru } V_1\text{)}$$

je podprostor v U.

Dk. $u_1, u_2 \in \varphi^{-1}(V_1)$. Chceme dokázat, že $a u_1 + b u_2 \in \varphi^{-1}(V_1)$.
Platí $\varphi(u_1), \varphi(u_2) \in V_1$. V_1 je podprostor, tedy
$\varphi(a u_1 + b u_2) = a\varphi(u_1) + b\varphi(u_2) \in V_1$. Proto $a u_1 + b u_2 \in \varphi^{-1}(V_1)$.

-15-

Definice Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení.

Jádro lin. zobrazení φ je podprostor v U

$$\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{\vec{o}\}) = \{ u \in U ;\ \varphi(u) = \vec{o} \}$$

Obraz lin. zobrazení φ je podprostor ve V

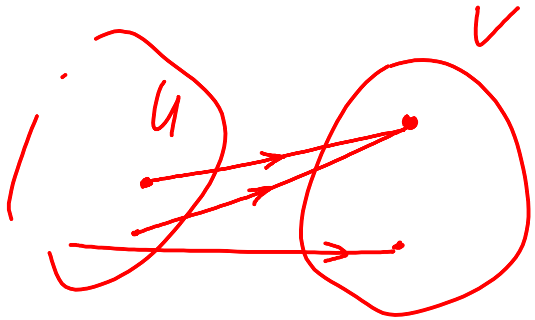
$$\operatorname{im} \varphi = \varphi(U) = \{ \varphi(u) \in V,\ u \in U \}$$

Tyto dva podprostory jsou důležité pro to, abychom zjistili, kdy je $\varphi : U \to V$ zobrazení surjektivní (na) a zobrazení injektivní (prosté)

-16-

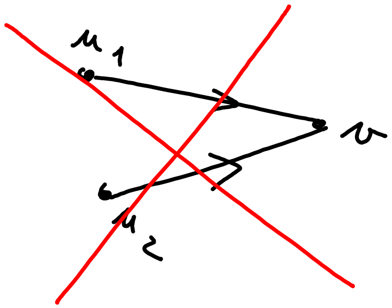
Zobrazení $\varphi: U \to V$ je surjektivní (na), jestliže

$$\forall v \in V \ \exists u \in U \quad v = \varphi(u)$$



Zobrazení $\varphi: U \to V$ je injektivní (prosté), jestliže

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \varphi(u_1) = \varphi(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$$



Věta: (1) Lineární zobrazení $\varphi: U \to V$ je surjektivní, právě když

$$\operatorname{im} \varphi = V.$$

(2) Lineární zobrazení $\varphi: U \to V$ je injektivní, právě když

$$\ker \varphi = \{\vec{o}\}.$$

Důkaz: (1) je zřejmé z definice.

(2) $\Leftarrow$ Nechť $\ker \varphi = \{\vec{o}\}$. A nechť

$$\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$$

$$\varphi(u_1) - \varphi(u_2) = \vec{o}$$

$$\varphi(u_1 - u_2) = \vec{o} \Rightarrow u_1 - u_2 \in \ker \varphi = \{\vec{o}\} \Rightarrow u_1 - u_2 = \vec{o}$$

-18-

Tedy $u_1 = u_2$ a φ je prosté.

$\Longrightarrow$ Nechť φ je prosté a nechť $u \in \ker\varphi$. Protože $\vec{o} \in \ker\varphi$, máme

$$\varphi(u) = \vec{o} = \varphi(\vec{o})$$

Z injektivity plyne $u = \vec{o}$. Tedy $\ker\varphi = \{\vec{o}\}$

Věta o dimenzích jádra a obrazu

Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární a U je prostor konečné dimenze. Potom

$$\underset{k+s}{\dim U} = \underset{k}{\dim \ker\varphi} + \underset{s}{\dim \operatorname{im}\varphi}.$$

Důkaz. $\ker\varphi \leq U$, $\operatorname{im}\varphi \leq V$.

Nechť $u_1, u_2, \ldots u_k$ je báze $\ker\varphi$. Doplníme ji na bázi prostoru U.

-19-

Báze U $\quad u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_s$

Které vektory budou tvořit bázi $\operatorname{im}\varphi$?

Budou to vektory $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(v_s)$.

Dokážeme-li, že tvoří bázi $\operatorname{im}\varphi$, jsme hotovi, protože

$$(k+s) = k \quad + \quad s$$

Důkaz, že $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_s)$ je báze $\operatorname{im}\varphi$.

① Tyto vektory $\operatorname{im}\varphi$ generují.

$v \in \operatorname{im}\varphi$. Pak $v = \varphi(u)$, $u \in U$ $\quad u = a_1u_1 + \ldots + a_ku_k + b_1v_1 + \ldots + b_sv_s$

Potom

$$v = \varphi(u) = \varphi(a_1u_1 + \ldots + a_ku_k + b_1v_1 + \ldots + b_sv_s) = \underbrace{a_1\overset{=\vec{0}}{\varphi(u_1)} + \ldots + a_k\overset{=\vec{0}}{\varphi(u_k)}} + b_1\varphi(v_1) + \ldots + b_s\varphi(v_s)$$

$$= b_1\varphi(v_1) + \ldots + b_s\varphi(v_s)$$

$\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_s)$ jsou LN

nechť
$$a_1\varphi(v_1) + \dots + a_s\varphi(v_s) = \vec{o}$$
$$\varphi(a_1v_1 + \dots + a_sv_s) = \vec{o}$$
$$a_1v_1 + \dots + a_sv_s \in \ker\varphi$$
$$a_1v_1 + \dots + a_sv_s = c_1u_1 + \dots + c_ku_k$$
$$-c_1u_1 - \dots - c_ku_k + a_1v_1 + \dots + a_sv_s = \vec{o}$$

$u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_s$ je báze U, jsou to LN vektory, proto
$$c_1 = \dots = c_k = a_1 = \dots = a_s = 0$$

Tedy $a_1 = \dots = a_s = 0$ a vektory $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_s)$ jsou LN.

-21-

<u>Definice</u> Zobrazení $\varphi : U \to V$ se nazývá lineární izomorfismus vekt. prostorů U a V, jestliže je lineární, prosté a surjektivní

<u>Lemma:</u> Je-li $\varphi : U \to V$ lineární izomorfismus, pak existuje inverzní zobrazení $\varphi^{-1} : V \to U$ a to je také lineární.

<u>Věta:</u> Lineární izomorfismus převádí bázi $u_1, \dots u_n$ na bázi $\varphi(u_1), \dots \varphi(u_n)$. Tedy lin. izomorfní prostory mají stejnou dimenzi.

<u>Věta:</u> Je-li U prostor konečné dimenze, $\alpha = (u_1, u_2, .. u_n)$ báze. Pak

$$(\ )_\alpha : U \to \mathbb{K}^n$$

je lineární izomorfismus