Matice lin. zobrazení.

Lin. zobrazení: U, V v. p. nad $\mathbb{K}$, $\varphi: U \to V$ lineární

$\forall u, v \in U,\ a, b \in \mathbb{K}: \quad \varphi(au + bv) = a\varphi(u) + b\varphi(v)$

Příklady: $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^k$ A matice $k \times n$ s prvky v $\mathbb{K}$

$$\varphi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k \qquad \varphi(x) = Ax, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Každé lin. zobrazení $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ je tohoto tvaru.

Souřadnice U vekt. prostor, $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

$$U \ni u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n \qquad (u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

2

Souřadnice zadávají lin. zobrazení

$$(\ )_\alpha : U \longrightarrow K^n$$

prosté, na – bijekce, inverzní zobrazení

$$K^n \ni \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longmapsto a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n \in U$$

<u>Skládání lin. zobrazení</u>

(1) $Id : U \to U$ $\quad Id(u) = u \quad$ je lin izomorfismus

(2) $\varphi : U \to V$, $\psi : V \to W$ lineární

$\psi \circ \varphi : U \to W$ je rovněž lineární

? $\varphi(x) = Ax$, $\psi(y) = By \qquad \psi \circ \varphi(x) = B(Ax) = (BA)x$

3

(3) $\varphi : U \to V$ lin. izomorfismus

$\varphi^{-1} : V \to U$ je rovněž lin. zobrazení

$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \qquad \varphi(x) = Ax$

$\varphi^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \qquad \varphi^{-1}(y) = By$

$\varphi : U \to V$, $\dim U < \infty$

$\dim U = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi$

φ je lin. izomorfismus

$\ker \varphi = \{\vec{o}\}$ a

$\dim U = \dim \operatorname{im} \varphi = \dim V$

$$x = \varphi^{-1} \circ \varphi(x) = B(Ax) = (BA)x \quad \to \quad BA = E$$

$$y = \varphi \circ \varphi^{-1}(y) = A(By) = (AB)y \qquad AB = E \quad \Rightarrow \quad B = A^{-1}.$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots$$

Matice lin. zobrazení

U, V vekt. prostory nad $\mathbb{K}$ dimenzí n a k s bázemi

$\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ v U $\qquad \beta = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ ve V

$u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \ldots$

4

$s_1 A = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$s_2 A = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\varphi : U \to V$ je lin. zobrazení

$$\begin{tikzcd} u_1 \arrow[d, bend right] & U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, shift left, "(\ )_\alpha"] & V \arrow[d, shift right, "(\ )_\beta"'] & \varphi(u_1) \arrow[d, mapsto] \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbb{K}^n \arrow[r, dashed, "x \mapsto Ax"] \arrow[u, shift left] & \mathbb{K}^k \arrow[u, shift right] & (\varphi(u_1))_\beta \end{tikzcd}$$

Zde dostáváme lin. zobrazení, pokud jde o lin. zobrazení z $\mathbb{K}^n$ do $\mathbb{K}^k$, musí být určeno maticí. Tuto matici nazýváme maticí lin. zobrazení

<u>Definice</u>: matice lin. zobrazení $\varphi : U \to V$ v bázích α a β je matice

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\beta \ (\varphi(u_2))_\beta \cdots (\varphi(u_n))_\beta \right)$$

5

Příklad

$U = \mathbb{R}_3[x] \qquad \alpha = (1, x, x^2, x^3)$

$V = \mathbb{R}_2[x] \qquad \beta = (1, x, x^2)$

$\varphi(p) = p'$ (derivace) $\qquad (\varphi)_{\beta,\alpha} = ?$

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \left((\varphi(1))_\beta \ (\varphi(x))_\beta \ (\varphi(x^2))_\beta \ (\varphi(x^3))_\beta \right)$$

$$= \left((0)_\beta \ (1)_\beta \ (2x)_\beta \ (3x^2)_\beta \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6

Jiný příklad

$U = V = \mathbb{R}^2 \qquad \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix}$

$\alpha = \beta = (u_1, u_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \qquad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\left(\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)_\alpha \left(\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)_\alpha \right) = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_\alpha \right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(\varphi)_{\varepsilon_2,\varepsilon_2} = \left((\varphi(e_1))_{\varepsilon_2} (\varphi(e_2))_{\varepsilon_2} \right) = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}_{\varepsilon_2} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\varepsilon_2} \right) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$\varepsilon_2 = (e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Věta: Nechť U, V jsou vekt. prostory s bázemi α, β. Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární. Potom platí

(*) $(\forall u \in U)$ $\qquad \underline{(\varphi(u))_\beta} = \underline{(\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha}$

Důkaz: Opět souvisí s obrázkem

$$\begin{tikzcd}
u \in U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & V \arrow[d, "(\ )_\beta"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^k
\end{tikzcd}$$

$u \longmapsto \varphi(u) \longmapsto (\varphi(u))_\beta$

$x \longmapsto (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot x$

$u \longmapsto (u)_\alpha \longmapsto (\varphi)_{\beta,\alpha} (u)_\alpha$

<u>Formální důkaz.</u> Máme dvě

lin. zobrazení $U \to \mathbb{K}^k$

(1) $u \longmapsto (\varphi(u))_B$ (složení 2 lin. zobrazení je lineární)

(2) $u \longmapsto (\varphi)_{B,\alpha} (u)_\alpha$ (složení 2 lin zobrazení je lineární)

Lin zobrazení jsou jednoznačně určena svými hodnotami na vektorech nějaké báze. Spočítáme hodnoty těchto zobrazení na vektorech báze $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

(1) $u_1 \longmapsto (\varphi(u_1))_B$ = 1. sloupec matice $(\varphi)_{B,\alpha}$

(2) $u_1 \longmapsto (\varphi)_{B,\alpha} (u_1)_\alpha = (\varphi)_{B,\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ = 1. sloupec matice $(\varphi)_{B,\alpha}$

Tedy obě zobrazení jsou stejná.

9

Příklad (navazuje na 1. příklad)

$U = \mathbb{R}_3[x] \qquad \alpha = (1, x, x^2, x^3)$

$V = \mathbb{R}_2[x] \qquad \beta = (1, x, x^2)$

$\varphi(p) = p' \qquad (\varphi)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$p = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$

$$(\varphi(p))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (p)_\alpha$$

Levá strana:

$$(\varphi(p))_\beta = (6x^2 - 2x + 5)_\beta = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Pravá strana:

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (p)_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

10

Věta o počítání s maticemi lin. zobrazení

(1) Nechť $id_U : U \to U$ je identické zobrazení, α báze v U. Potom

$$(id_U)_{\alpha,\alpha} = E.$$

(2) Nechť báze prostorů U, V, W jsou postupně α, β, γ a nechť $\varphi : U \to V$ a $\psi : V \to W$ jsou lineární. Potom

$$(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha} \quad \text{(násobení matic)}$$

(3) Nechť $\varphi : U \to V$ je lin. izomorfismus, α báze v U, β báze ve V.
Potom pro $\varphi^{-1} : V \to U$ je

$$(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} = \left[(\varphi)_{\beta,\alpha}\right]^{-1} \quad \text{(inverzní matice)}$$

11

Důkaz pomocí diagramů

1

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "id"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & U \arrow[d, "(\ )_\alpha"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "x \mapsto x = Ex"'] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

$$(id)_{\alpha\alpha} = \left((id(u_1))_\alpha \ \cdots \ (id(u_n))_\alpha \right) = \left((u_1)_\alpha \cdots\cdots (u_n)_\alpha \right) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "\psi \circ \varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "(\ )_\beta"] & W \arrow[d, "(\ )_\gamma"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "x \mapsto (\varphi)_{\beta\alpha} x"] \arrow[rr, bend right, "x \mapsto (BA) x"'] & \mathbb{K}^k \arrow[r, "y \mapsto (\psi)_{\gamma\beta} y"] & \mathbb{K}^s \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{K}^k \arrow[dr, "y \mapsto By"] & \\ \mathbb{K}^n \arrow[ur, "x \mapsto Ax"] \arrow[rr, "x \mapsto (BA) x"] & & \mathbb{K}^s \end{tikzcd}$$

12

Matice přechodu mezi bázemi

Nechť U je konečnědimenzionální prostor s bázemi

$$\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad \text{a} \quad \beta = (v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Matice přechodu $(id)_{\beta,\alpha}$ je matice identického zobrazení

$$id : U \to U \qquad id(u) = u$$

v bázích α, β – tedy podle definice je to matice

$$(id)_{\beta,\alpha} = \left((u_1)_\beta \; (u_2)_\beta \; \ldots \; (u_n)_\beta \right)$$

13

Věta: Platí

$$(u)_\beta = (id)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha .$$

Tato věta říká k čemu je matice přechodu dobrá: Ze souřadnic v jedné bázi spočítáme souřadnice v druhé bázi.

Důkaz. Viz věta

$$(\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha$$

aplikovaná na $\varphi = id$.

14

Priklad $\quad U=\mathbb{R}^3$

$$\varepsilon = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right) \quad , \quad \alpha = (u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&3\\-1&-3&2\end{pmatrix}$$

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \left(\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)_\varepsilon \left(\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}\right)_\varepsilon \left(\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right)_\varepsilon \right) = \begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&3\\-1&-3&2\end{pmatrix}$$

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)_\alpha \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)_\alpha \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)_\alpha$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 = a_{11}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

15

Dostaneme soustavu 3 rovnic a 3 neznámých.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Souřadnice vektoru $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ v bázi α vypočteme ze soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a stejně tak souřadnice $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ v bázi α

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

16

Tyto 3 soustavy můžeme zapsat jedinou maticovou rovnicí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

To je hledaná matice přechodu

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

17

Věta.

1. $(id)_{\alpha,\alpha} = E$

2. $(id)_{\gamma,\alpha} = (id)_{\gamma,\beta}(id)_{\beta,\alpha}$

3. $(id)_{\alpha,\beta} = \left((id)_{\beta,\alpha}\right)^{-1}$

Důkaz je zvláštní případ věty pro matice lin. zobrazení

2. $(id)_{\gamma,\alpha} = (id \circ id)_{\gamma,\alpha} = (id)_{\gamma,\beta} \circ (id)_{\beta,\alpha}$

3. $(id)_{\alpha,\beta} = \left((id)^{-1}\right)_{\alpha,\beta} = \left[(id)_{\beta\alpha}\right]^{-1}$

18

Poučení z této věty:
pracujeme-li v $\mathbb{R}^n$ a máme-li spočítat $(id)_{\alpha,\varepsilon}$ počítáme raději

$$(id)_{\varepsilon,\alpha},$$

což je jednodušší a pak

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = \left[(id)_{\varepsilon,\alpha}\right]^{-1}.$$

Speciální důsledek ③ pro lin. zobrazení: $\varphi : U \to V$ lin. izo

$$(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} = \left[(\varphi)_{\beta,\alpha}\right]^{-1}$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, shift left, "\varphi"'] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & V \arrow[l, shift left, red, "\varphi^{-1}"'] \arrow[d, "(\ )_\beta"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, shift left, "x \mapsto Ax"] & \mathbb{K}^n \arrow[l, shift left, red, "A^{-1}y \mapsfrom y"]
\end{tikzcd}$$