VEKTOROVÉ PROSTORY

Vekt. prostor U nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ je neprázdná množina s operacemi $+ : U \times U \to U$, $\cdot : \mathbb{K} \times U \to U$, které mají 8 vlastností (minule)

Příklady zobrazení

(1) Množina zobrazení z množiny $M \neq \emptyset$ do $\mathbb{K}$.

$$\mathrm{Map}(M, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^M$$

Operace sčítání na zobrazeních je definována takto

$$f : M \to \mathbb{K}, \quad g : M \to \mathbb{K}, \quad m \in M$$

$$f + g : M \to \mathbb{K} \qquad (f+g)(m) = f(m) + g(m)$$

$$c \in \mathbb{K} \quad cf : M \to \mathbb{K} \qquad (cf)(m) = c \cdot f(m)$$

Obě operace mají požadované vlastnosti.

Nulový vektor je nulová funkce $f(m)=0 \quad \forall m \in M$.

Například vekt. prostor $\mathbb{K}^n$ je zvláštním případem $Map(M,\mathbb{K})$.

Za M zde bereme

$$M=\{1,2,3,\dots n\}$$

$$\begin{array}{ccc} Map(M,\mathbb{K}) & & \mathbb{K}^n \\ f: M \to \mathbb{K} & \longmapsto & (f(1), f(2), \dots f(n)) \\ f: M \to \mathbb{K} & \longleftarrow\!\!\!\mid & (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array}$$

$$f(i)=x_i$$

Vezmeme-li za $M=\{1,2,\dots k\}\times\{1,2,\dots n\}$

$$\begin{array}{ccc} Map(M,\mathbb{K}) & & Mat_{k\times n}(\mathbb{K}) \\ f: M \to \mathbb{K} & \longmapsto & A\ ;\ A_{ij}=f(ij) \\ f: M \to \mathbb{K} & \longleftarrow\!\!\!\mid & A \end{array}$$

$$f(ij)=A_{ij}$$

2 Spojitá zobrazení z intervalu I do $\mathbb{R}$ … $C(I)$.

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ pro. li f a g spojité, je

$(cf)(x) = c \cdot f(x)$ $f+g$ a cf také spojitá.

Ze základních vlastností

$\vec{u}, \vec{v} \in U$ $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in U$ $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

$\exists \vec{0} \in U \ \forall \vec{u} \in U$ $\vec{0}+\vec{u} = \vec{u}$

$\forall u \in U \ \exists \vec{w} \in U$ $\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}$

$a, b \in \mathbb{K}, \vec{u}, \vec{v} \in U$

$(a+b)\vec{u} = a\vec{u}+b\vec{u}$

$a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u}+a\vec{v}$

$a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$

$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

lze odvodit vlastnosti další:

(i) $0 \in \mathbb{K}, \vec{u} \in U$ $\qquad 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$

$$\underline{0 \cdot \vec{u}} = (0+0)\vec{u} = \underline{0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{u}} \qquad \Big/ + (-0 \cdot \vec{u})$$

$$\underbrace{0 \cdot \vec{u} + (-0 \cdot \vec{u})}_{\vec{0}} = 0 \cdot \vec{u} + \underbrace{0 \cdot \vec{u} + (-0 \cdot \vec{u})}_{\vec{0}}$$

4

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{u} + \vec{0}$$

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$$

(ii) $c \in \mathbb{K}$ $\quad c \cdot \vec{0} = \vec{0}$

$$c \cdot \vec{0} = c \cdot (\vec{0} + \vec{0}) = c \cdot \vec{0} + c \cdot \vec{0} \qquad (+(-c\vec{0}))$$

$$\underbrace{c \cdot \vec{0} + (-c\vec{0})}_{\vec{0}} = c \cdot \vec{0} + \underbrace{c \cdot \vec{0} + (-c\vec{0})}_{\vec{0}}$$

$$\vec{0} = c \cdot \vec{0} + \vec{0}$$

$$\vec{0} = c \cdot \vec{0}$$

(iii) Platí $\forall c \in \mathbb{K}\ \forall \vec{u} \in U \quad c \cdot \vec{u} = \vec{0} \iff c = 0$ nebo $\vec{u} = \vec{0}$

$\Leftarrow$ bylo dokázáno v (i) a (ii)

$\Rightarrow$ předpokládejme, že $c \neq 0$

$$c \cdot \vec{u} = \vec{0} \quad \Big/ \cdot c^{-1}$$

$$c^{-1}(c\,\vec{u}) = c^{-1} \cdot \vec{0}$$

$$(c^{-1}c)\,\vec{u} = \vec{0}$$

5

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{Q}$$
$$\vec{u} = \vec{0}$$

(iv) $\forall \vec{u} \in U \quad (-1)\cdot\vec{u} = -\vec{u}$

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{u} = (1 + (-1))\,\vec{u} = 1\cdot\vec{u} + (-1)\,\vec{u} = \vec{u} + (-1)\cdot\vec{u} \quad \Big/ + (-\vec{u})$$

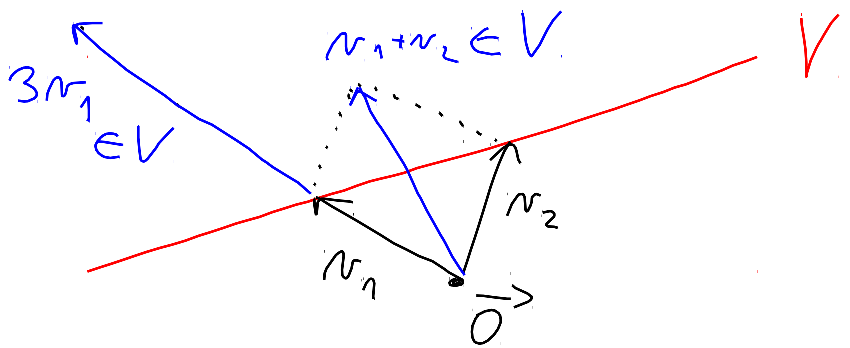
$$\underbrace{(-\vec{u}) + \vec{0}} = \underbrace{(-\vec{u}) + \vec{u}} + (-1)\,\vec{u}$$
$$-\vec{u} = \vec{0} + (-1)\,\vec{u}$$
$$-\vec{u} = (-1)\cdot\vec{u}$$

<u>VEKTOROVÝ PODPROSTOR</u> V vektorového prostoru U nad $\mathbb{K}$ je neprázdná podmnožina $V \subseteq \mathbb{K}$ taková, že platí

(1) $\forall v_1, v_2 \in V \quad v_1 + v_2 \in V$

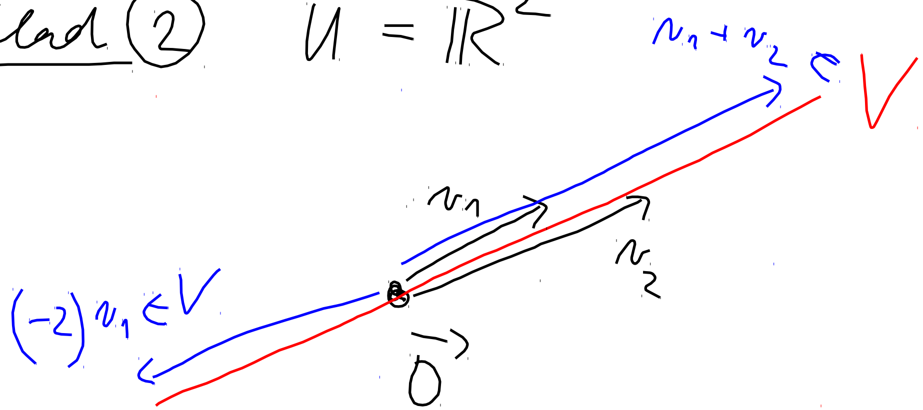
(2) $\forall c \in \mathbb{K}\ \forall v \in V \quad c \cdot v \in V$

Příklad 1 $U = \mathbb{R}^2$ (rovina s počátkem)



V není vektorový podprostor

Příklad 2 $U = \mathbb{R}^2$



V v tomto případě je vekt. podprostor

Lemma Je-li V vekt. podprostor prostoru U, pak $\vec{o} \in V$.

Dk: V je neprázdná, proto existuje $\vec{v}$. Nulový násobek

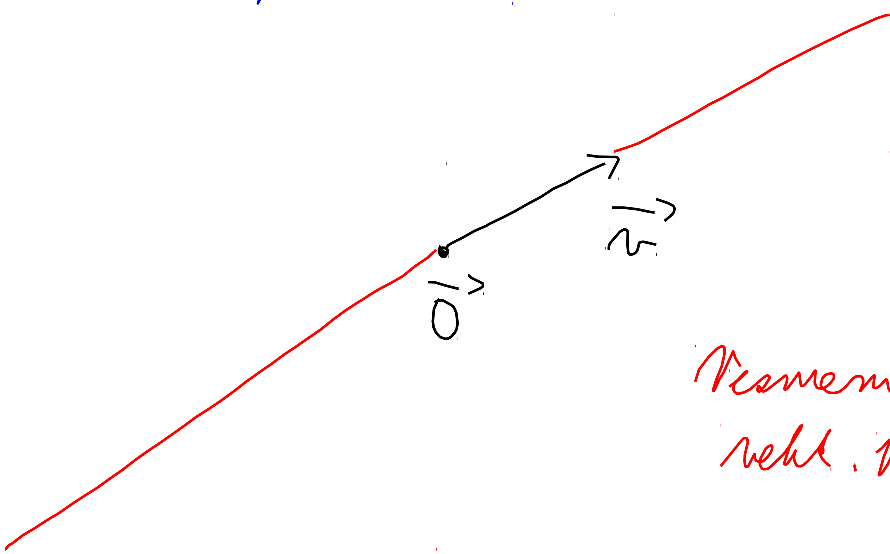
$$0 \cdot \vec{v} \in V, \text{ ale } 0 \cdot \vec{v} = \vec{o} \in V.$$

<u>Obecně o $\mathbb{R}^2$</u> – najdeme všechny vekt. podprostory v rovině.

Množina $\{\vec{0}\}$ je určitě vekt. podprostor.

$$\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \in \{\vec{0}\}$$
$$c \cdot \vec{0} = \vec{0} \in \{\vec{0}\}$$

Další podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^2$ obsahuje vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$.



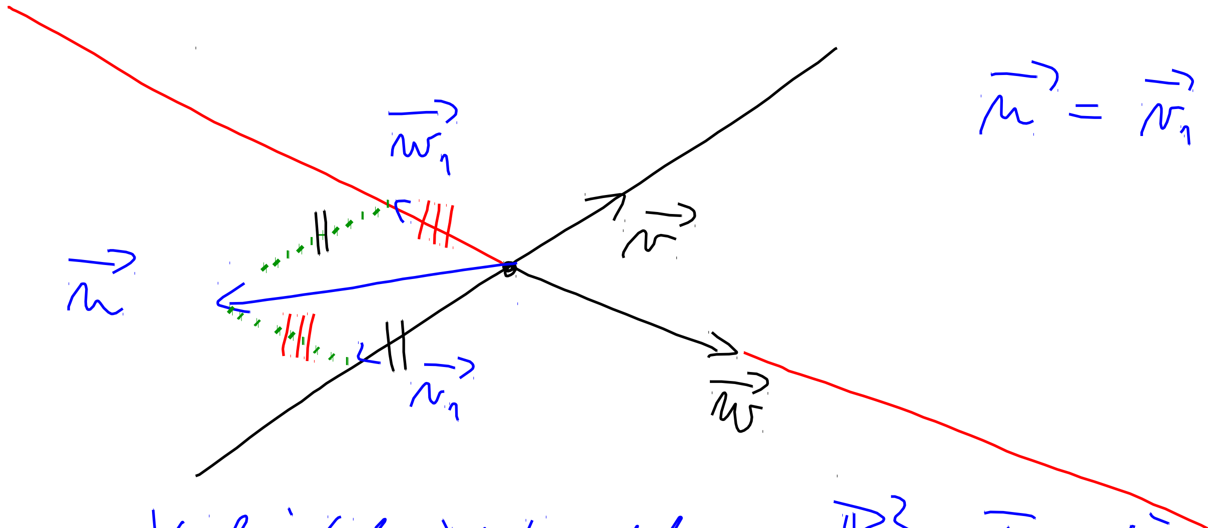
Všechny jeho násobky $c\vec{v} \in V$.

Tyto násobky vyplní přímku procházející počátkem.

Vezmeme-li za V tuto přímku je to vekt. podprostor.

(8)

Předpokládejme, že kromě přímky $\{c\cdot\vec{v},\ c\in\mathbb{R}\}$ leží ve V jistě nějaký další vektor $\vec{w}\in V$, $\vec{u}\neq\vec{0}$



$$\vec{u}=\vec{v}_1+\vec{w}_1=\underbrace{\underbrace{a\cdot\vec{v}}_{\in V}+\underbrace{b\cdot\vec{w}}_{\in V}}_{\in V}$$

Potom ve V leží každý vektor z $\mathbb{R}^2$. Tudíž $V=\mathbb{R}^2$.

Závěr: Všechny vekt. podprostory v $\mathbb{R}^2$ jsou tyto:

(1) $\{\vec{0}\}$

(2) všechny přímky procházející počátkem

(3) $\mathbb{R}^2$

Vekt. podprostory v $\mathbb{R}^3$

(1) $\{\vec{o}\}$

(2) přímky procházející počátkem

(3) roviny procházející počátkem

(4) $\mathbb{R}^3$

Další důležitý příklad

A je matice $k \times n$ nad $\mathbb{K}$. Potom řešení homogenní soustavy rovnic

$$Ax = 0$$

je vekt. podprostor v $\mathbb{K}^n$

$$V = \{x \in \mathbb{K}^n ; \ Ax = 0\}$$

(10)

V je neprázdná $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in V.$

x a x' jsou řešení $Ax = 0$, $Ax' = 0$, pak $x + x'$

$$A(x + x') = Ax + Ax' = 0 + 0 = 0$$

je řešení.

$$A(cx) = c \cdot (Ax) = c \cdot 0 = 0$$

Řešení cx je řešení.

LINEÁRNÍ KOMBINACE VEKTORŮ

Nechť $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in U$. Lineární kombinace vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ je vektor

$$a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + \dots + a_k \vec{u}_k \in U, \quad \text{kde } a_1, a_2, \dots a_k \in \mathbb{K}$$

11

Lemma Je-li V vekt. podprostor prostoru U a $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$, pak lin. kombinace těchto vektorů opět leží ve V.

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_k\vec{v}_k \in V.$$

Dk: Indukcí

$k = 1$ $\quad \vec{v}_1 \in V \Rightarrow a_1\vec{v}_1 \in V$

$k = 2$ $\quad \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \Rightarrow a_1\vec{v}_1, a_2\vec{v}_2 \in V \Rightarrow a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \in V$

Nechť platí pro k, dokážeme pro $k+1$ $\quad (k \geq 1)$.

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{k+1} \in V \Rightarrow a_1\vec{v}_1 + \dots + a_k\vec{v}_k \in V, \; a_{k+1}\vec{v}_{k+1} \in V$

$\Rightarrow a_1\vec{v}_1 + \dots + a_k\vec{v}_k + a_{k+1}\vec{v}_{k+1} \in V.$

LINEÁRNÍ OBAL VEKTORŮ

Nechť $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_k$ jsou vektory v U. Lineární obal těchto vektorů je množina

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_k] = \{a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + \dots + a_k \vec{u}_k \in U,\ a_1, a_2, \dots a_k \in K\}$$

Definujeme
$$[\emptyset] = \{\vec{o}\}$$

Věta Lineární obal vektorů je vekt. podprostor.

Dk: $[\emptyset] = \{\vec{o}\}$ je vekt. podprostor.

$$v, w \in [u_1, \dots u_k] \Rightarrow v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k$$
$$w = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_k u_k$$
$$v + w = (a_1 + b_1) u_1 + (a_2 + b_2) u_2 + \dots + (a_k + b_k) u_k \in [u_1, \dots u_k]$$
$$c v = (c a_1) u_1 + (c a_2) u_2 + \dots + (c a_k) u_k \in [u_1, u_2, \dots, u_k]$$

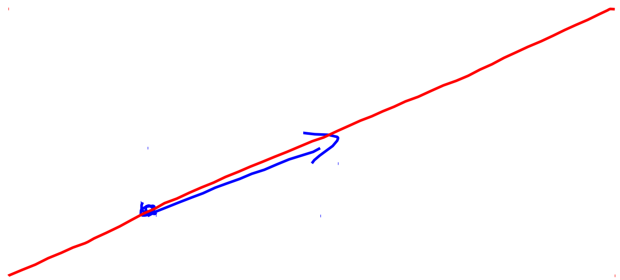
13

Lineární obaly v $\mathbb{R}^2$

$[\emptyset] = \{\vec{0}\}$

$v \in \mathbb{R}^2$ $\qquad [v] = \{\vec{0}\}$ pro $v = \vec{0}$

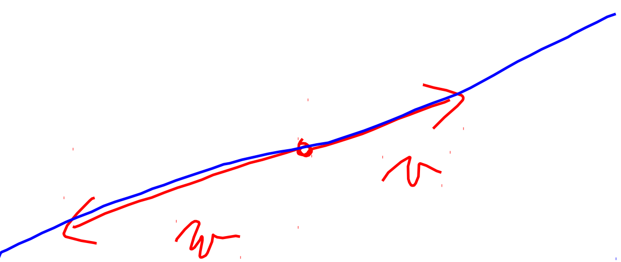
$\{av : a \in \mathbb{R}\}$ přímka pro $v \neq \vec{0}$.



$v, w \in \mathbb{R}^2$ $\qquad w = av$

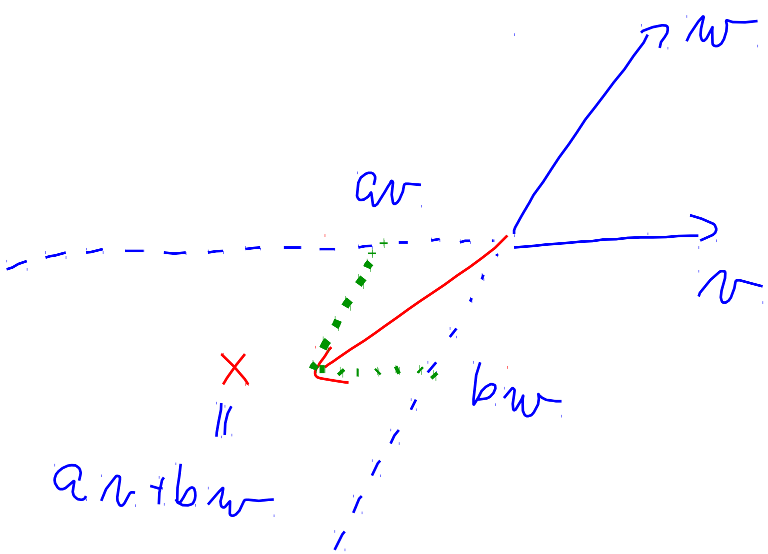
$[v, w] = \{cv + dw\} = \{cv + dav\} = \{(c+da)v\}$

$= \{bv\} = [v]$



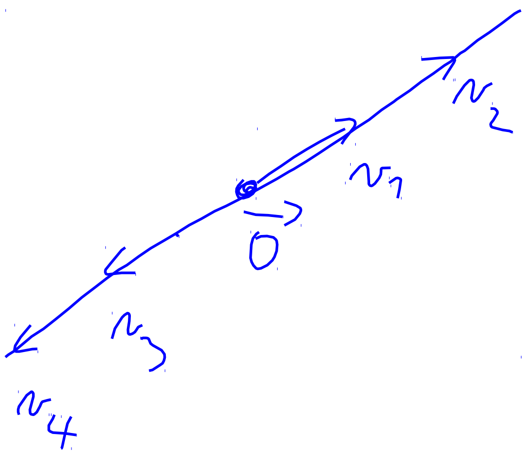
Jediné v a w neleží v jedné přímce procházející počátkem

Pak jejich lin. obal je podprostor, ale přímka procházející počátkem to být nemůže je to celé $\mathbb{R}^2$.

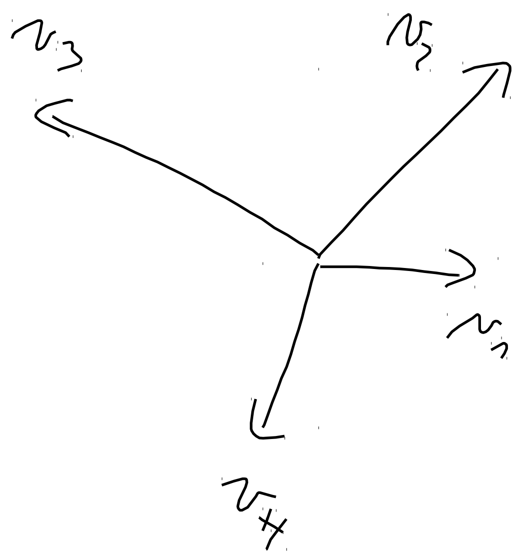


Nechť $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^2$ různé, $k \geq 2$.

Jestliže vždy leží v přímce procházející počátkem, je jejich lin. obalem tato přímka.



Jestliže neleží v jedné přímce procházející počátkem je jejich lin. obal celé $\mathbb{R}^2$.



$[v_1, v_2, v_3, v_4] = \mathbb{R}^2$

$[v_2, v_3] = \mathbb{R}^2$

$[v_1, v_3] = \mathbb{R}^2$

$[v_1, v_2, v_3] = \mathbb{R}^2$

16

VĚTA Lineární obal vektorů $v_1, v_2, \ldots v_k$ je nejmenší vekt. podprostor, ve kterém byly vektory leží.

Příklad: Obecná formulace: Leží daný vektor $u \in U$ v lineárním obalu $[u_1, u_2, \ldots u_k]$?

Řešení znamená najít $x_1, x_2, \ldots x_k \in \mathbb{K}$ tak, že

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_k u_k = u$$

$u \in [u_1, \ldots u_k]$ máme když existuje řešení předchozí rovnice.

Konkrétně $U = Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Leží matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad v \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] ?$$

17

Existují $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \;?$$

Porovnáme prvky v i-tém řádku a j-tém sloupci:

$$\begin{aligned} x_1 + 0 \cdot x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 2 \implies x_1 + x_2 = \underline{1} \\ 0 \cdot x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 &= 4 \qquad x_1 + x_2 = 4 \end{aligned}$$

nemá řešení

$A \notin$ lin. obalu neleží.

LINEÁRNÍ NEZÁVISLOST VEKTORŮ

Vektory $u_1, u_2, \ldots u_k \in U$ jsou lin. závislé, jestliže existuje k-tice čísel $(x_1, x_2, \ldots x_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ taková, že

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_k u_k = \vec{0}.$$

Příklad ① $\vec{0}$ je lin. závislý, neboť

$$1 \cdot \vec{0} = \vec{0} \qquad x_1 = 1$$

② Nechť $u_2 = 2u_1$, pak u_1 a u_2 jsou lin. závislé

$$2u_1 + (-1)u_2 = \vec{0} \qquad (x_1, x_2) = (2, -1)$$

3. $u_3 = 2u_1 + 3u_2$, pak u_1, u_2, u_3 jsou lin. závislé

$$2u_1 + 3u_2 + (-1)u_3 = \vec{O} \qquad (x_1, x_2, x_3) = (2, 3, -1)$$

4. $u_k = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_{k-1} u_{k-1}$, pak $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou lin. závislé

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_{k-1} u_{k-1} + (-1) u_k = \vec{O}$$

$$(x_1, \dots x_k) = (a_1, a_2, \dots a_{k-1}, -1)$$

Přeformulujeme definici lin. závislosti.

Vektory $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou lin. závislé, jestliže rovnice

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_k u_k = \vec{O}$$

v neznámých $x_1, x_2, \dots x_k \in \mathbb{K}$ má řešení $(x_1, x_2, \dots x_k) \neq (0, 0, \dots 0)$.

Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou lineárně nezávislé, jestliže rovnice

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_k u_k = \vec{O}$$

má pouze triviální řešení $(x_1, x_2, \dots x_k) = (0, 0, \dots 0)$.