CRAMEROVO PRAVIDLO

Laplaceův rozvoj determinantu podle i-tého řádku

A matice $n \times n$, A_{ij} je matice vzniklá z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce

$(a_{ij}) = A$, $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ algebraický doplněk prvku a_{ij}

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{a}_{ij}$$

Výpočet inverzní matice pomocí alg. doplňků

$$A^{-1} = \left(\frac{\tilde{a}_{ij}}{\det A} \right)^{T}$$

2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 4 - 6 = -2$$

$$(\tilde{a}_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\tilde{a}_{ij})^T =$$

$$= \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

③

<u>Cramerovo pravidlo</u>: Mějme matici A typu $n \times n$ a $\det A \neq 0$. Potom soustava

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

má jediné řešení, a to je

$$x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ a_{n1} & & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det A}$$

Matice v čitateli vznikne z matice A nahrazením i-tého sloupce sloupcem b.

<u>Důkaz:</u> Řešíme soustavy

$$A x = b$$

je

$$x = A^{-1} b$$

Pro A^{-1} použijeme vzorec pomocí alg. doplňků:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} (A^{-1})_{ij} \cdot b_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{a}_{ji}}{\det A} b_j = \frac{1}{\det A} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ji} b_j}_{} =$$

$$= \frac{\det \big(s_1(A) \dots s_{i-1}(A)\ b\ s_{i+1}(A) \dots s_n(A) \big)}{\det A}$$

Laplaceův rozvoj determinantu matice v čitateli Cramerova vzorce

5

HODNOST MATICE

Značení: A bude matice $k \times n$, ta bude mít n sloupců $s_1A, s_2A, \dots s_nA \in \mathbb{K}^k$ a k řádků $r_1A, r_2A, \dots r_kA \in \mathbb{K}^n$

Sloupcová hodnost matice A je

$$h_s(A) = \dim_{\mathbb{K}} [s_1A, s_2A, \dots s_nA]$$

Protože $s_iA \in \mathbb{K}^k$, je $h_s(A) \le k$

Protože počet generátorů je n, musí být rovněž $h_s(A) \le n$

$$h_s(A) \le \min(k, n)$$

$h_s(A)$ je rovna maximálnímu počtu lin. nezávislých sloupců

Řádková hodnost matice A je

$$h_r(A) = \dim [r_1 A, r_2 A, \dots r_k A]$$

Protože $r_i A \in \mathbb{K}^n$, je $h_r(A) \leq n$.
Protože je řádků k, je $h_r(A) \leq k$.
$\Big\}$ $h_r(A) \leq \min(k, n)$

Řádková hodnost se rovná maximálnímu počtu lin. nezávislých řádků.

Věta: Platí $h_s(A) = h_r(A)$.

Společnou hodnotu nazýváme hodností matice A, značíme $h(A)$.

Lemma: Řádková hodnost matice se nemění po provedení element. řádk. operací.

Dk: Při provedení řádkových operací se nemění prostor

$$[r_1 A, r_2 A, \dots r_k A]$$

Je zřejmé při
- prohození řádků
- vynásobení řádku nenulovým číslem
- k 1. řádku přičteme c-násobek 2. řádku

$$[r_1(A)+c r_2 A,\ r_2 A, \dots r_k A] = [r_1 A, r_2 A, \dots r_k A]$$

$$r_1 A = (r_1(A) + c r_2 A) - c r_2 A$$

Totéž platí pro sloupcové operace a sloupcovou hodnost.

Při Gaussově eliminaci se nemění řádk. hodnost

$A \rightsquigarrow B$ matice ve schodovitém tvaru

$h_r(A) = h_r(B)$ = počet nenulových řádků

Důkaz věty: Umíme algoritmus, který ze sloupců vybere lin. nezávislé se stejným lin. obalem.

$A \xrightarrow[\text{operace}]{\text{řádk.}} B$ ve schod. tvaru

$h_s(A)$ = počet ved. koeficientů v matici B = počet nenulových řádků matice $B = h_r(B) = h_r(A)$

(9)

Soustavy lin. rovnic

Nechť A je matice $k \times n$. Uvažujeme soustavy lin. rovnic

$$A \cdot x = b\,,$$

kde $x \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathbb{K}^k$. Neznámé jsou $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Věta o dimenzi řešení homogenní soustavy

Množina řešení homogenní soustavy

$$A x = 0$$

je vektorový podprostor v $\mathbb{K}^n$ dimenze $n - h(A)$

Důkaz: $\mathrm{Res}(A, 0) = \{x \in \mathbb{K}^n;\ Ax = 0\}$

$Res(A,0)$ je vekt. podprostor, neboť

$Res(A,0) \neq \emptyset$ $\qquad 0 \in Res(A,0)$

$x, y \in Res(A,0)$, pak $Ax = 0$ a $Ay = 0$.

$A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$

Tedy i $x+y \in Res(A,0)$. Pro $c \in \mathbb{K}$

$A(cx) = cAx = c \cdot 0 = 0$

$cx \in Res(A,0)$.

Souvislost s lin. zobrazeními: Pro

$$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k \qquad \varphi(x) = Ax$$

je

$$\ker \varphi = \{x \in \mathbb{K}^n;\ \varphi(x) = 0\} = Res(A,0)$$

(11)

To znamená, že

$$\dim \operatorname{Res}(A,0) = \dim \ker \varphi = \dim \mathbb{K}^n - \dim \operatorname{Im} \varphi$$
$$= n - \dim \operatorname{Im} \varphi$$

Spočítejme $\dim \operatorname{Im} \varphi$

$$\operatorname{Im} \varphi = [\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_n)] = [A \cdot e_1, A \cdot e_2, \dots A \cdot e_n] =$$

$$= [s_1 A, s_2 A, \dots s_n A]$$

$$\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim [s_1 A, \dots s_n A] = h_s(A) = h(A)$$

$$\dim \operatorname{Res}(A,0) = n - \dim \operatorname{Im} \varphi = n - h(A)$$

<u>Příklad:</u> Přímka v $\mathbb{R}^3$ procházející počátkem má dimenzi 1 a je dána soustavou 2 rovnic homogenních

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$$

Rovnice musí být lin. nezávislé, jinak by popisovali rovinu nebo celé $\mathbb{R}^3$, pokud by byly obě nulové.

$$\dim\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, 0\right) = 3 - h\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

v případě, že jsou řádky lin. nezávislé.

Rovina v $\mathbb{R}^3$ procházející počátkem $\quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$

$$(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$$

$$\dim\left((a_1, a_2, a_3), 0\right) = 3 - h(a_1, a_2, a_3) = 3 - 1 = 2$$

2 Frobeniova věta o řešitelnosti soustav rovnic

Soustava lin. rovnic

$$A x = b$$

má řešení, právě když

$$h(A) = h(A|b)$$

Důkaz: Nechť soustava $A x = b$ má řešení $x_1, x_2, \dots x_n$.
Potom lze rovnost $A x = b$ přepsat takto

$$s_1 A \cdot x_1 + s_2 A \; x_2 + \dots s_n A \cdot x_n = b$$

To znamená, že b je lin. kombinací sloupců matice A.

$$[s_1 A, s_2 A, \dots s_n A] = [s_1 A, \dots s_n A, b]$$

$$\dim [s_1 A, \dots s_n A] = \dim [s_1 A, \dots s_n A, b]$$

Tedy $\underline{h(A)} = h_s(A) = h_s(A|b) = \underline{h(A|b)}$

$\Longleftarrow$ Jestliže $h(A) = h(A|b)$, je

$$\dim[s_1A, \dots s_nA] = \dim[s_1A, \dots s_nA, b]$$

a protože $[s_1A, \dots s_nA] \subseteq [s_1A, \dots, s_nA, b]$

musí být $[s_1A, \dots s_nA] = [s_1A, \dots, s_nA, b]$

Proto je b lin. kombinací sloupců matice A, tj.

$$x_1 s_1A + x_2 s_2A + \dots + x_n s_nA = b$$

To je

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \implies \text{soustava } Ax = b$$

má řešení.

17

Důkaz lze provést rovněž pomocí Gaussovy eliminace a řádk. úprav.

$Ax = b$ $\qquad (A|b) \rightsquigarrow \underbrace{(B|c)}_{\text{matice ve schod. tvaru}}$

$Bx = c$ má řešení, právě když počet nenul. řádků B = počet nenulových řádků $(B|c)$

$$\begin{array}{ccc} h_r(B) & = & h_r(B|c) \\ \| & & \| \\ h_r(A) & & h_r(A|b) \end{array}$$

3 Věta o struktuře řešení

Nechť $\mathrm{Res}(A\,|\,b)$ je množina všech řešení soustavy

$$Ax = b$$

Nechť $Ax = b$ má nějaké řešení $z \in \mathbb{K}^n$. Potom platí

$$\mathrm{Res}(A\,|\,b) = \underbrace{\{z + y \in \mathbb{K}^n;\ \text{kde } y \in \mathrm{Res}(A\,|\,0)\}}_{z + \mathrm{Res}(A,0)}$$

19

Důkaz:

1. $\{z+y \mid y \in Res(A|0)\} \subseteq Res(A|b)$

Nechť $y \in Res(A|0)$. Platí $Az = b$, $Ay = 0$.

$$A(z+y) = Az + Ay = b + 0 = b$$

Tedy $z+y \in Res(A|b)$

2. $Res(A|b) \subseteq \{z+y \mid y \in Res(A|0)\}$

Nechť $x \in Res(A|b)$, platí $Ax = b$, $Az = b$.

$$x = z + (x-z)$$

$$A(x-z) = Ax - Az = b - b = 0$$

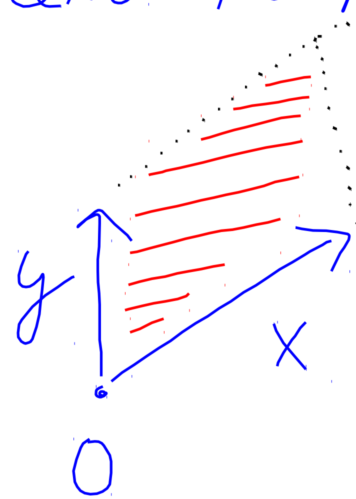
Tedy $x \in \{z+y \mid y \in Res(A|0)\}$

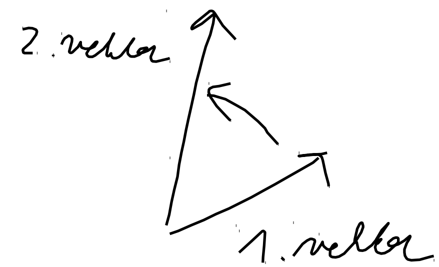
Geometrický význam determinantu

Determinant matic 2×2 je orientovaný obsah rovnoběžníku, který je určen sloupci matice

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^2$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$





kladná orientace

záporná orientace

21

Orientovaný rovnoběžník $R(x,y)$, orientace je dána pořadím vektorů x a y.

Je-li orientace x a y kladná, je orient. obsah

$$S_{R(x,y)} = \text{stand. obsah rovnoběžníku}$$

je kladný

Je-li orientace x a y záporná, je orient. obsah

$$S_{R(x,y)} = -\,\text{stand. obsah rovnoběžníku}$$

je záporný

Orientovaný obsah rovnoběžníku $R(x,y)$ budeme značit

$$S(x,y)$$

22

Pravidla pro orientovaný obsah

1. $S(e_1, e_2) = 1$

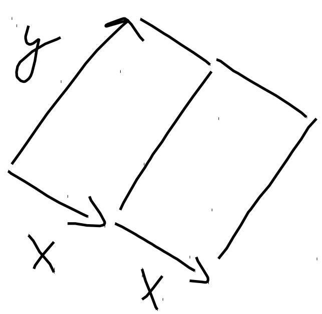
2. $S(x, y) = -S(y, x)$

Z tohoto pravidla plyne

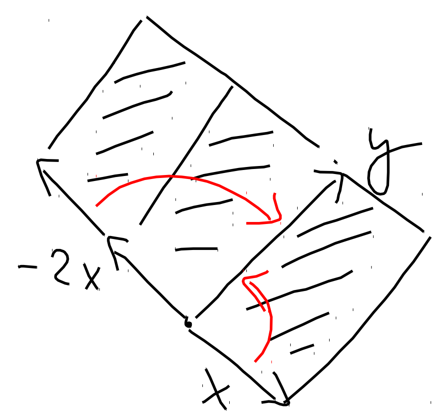
$$S(x,x) = -S(x,x) \implies S(x,x) = 0.$$

3. $S(cx, y) = c\,S(x,y)$

$c = 2$



$c = -2$



21

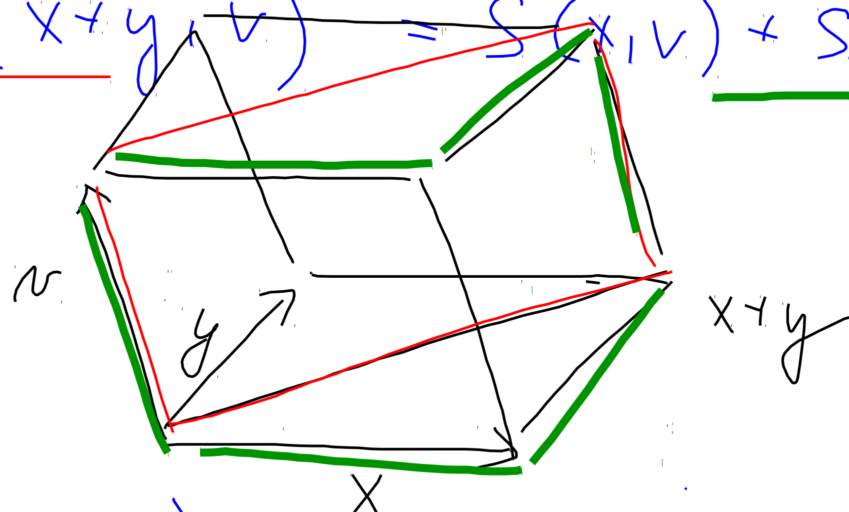
Z pravidel 2 a 3 plyne, že rovněž

$$S(x, cy) = c\,S(x, y)$$

Odvození

$$S(x, cy) \underset{2}{=} -S(cy, x) \underset{3}{=} -c\,S(y, x) \underset{2}{=} c\,S(x, y)$$

4 $S(x+y, v) = S(x, v) + S(y, v)$



$$S(x+y, v) = S(x, v) + S(y, v)$$

Obsah červeně ohraničené části se rovná obsahu zeleně ohraničené části.