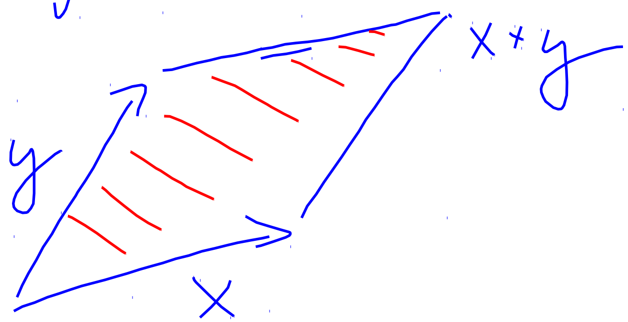
Geometrický význam determinantu

$S(x,y)$ je orientovaný obsah rovnoběžníku



Axiómy pro orientovaný obsah v $\mathbb{R}^2$

1. $S(e_1, e_2) = 1$

2. $S(x,y) = -S(y,x) \Rightarrow S(x,x) = 0$
3. $S(cx, y) = c\,S(x,y) = S(x, cy)$
4. $S(x+z, y) = S(x,y) + S(z,y)$
   $S(x, y+z) = S(x,y) + S(x,z)$

<u>Věta:</u> Jestliže $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, pak $S(x,y) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$

<u>Důkaz:</u> $S(x,y) = S(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) \overset{4}{=}$

$= S(x_1e_1, y_1e_1 + y_2e_2) + S(x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) =$

$\overset{4}{\underset{2\times}{=}} S(x_1e_1, y_1e_1) + S(x_1e_1, y_2e_2) + S(x_2e_2, y_1e_1) + S(x_2e_2, y_2e_2) =$

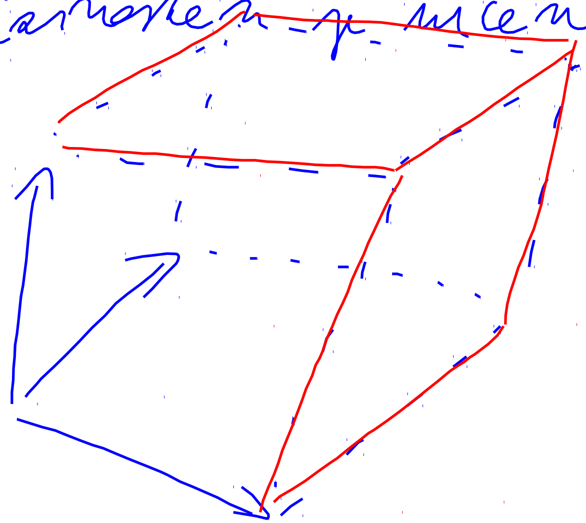
$\overset{3}{=} x_1y_1 S(e_1,e_1) + x_1y_2 S(e_1,e_2) + x_2y_1 \underbrace{S(e_2,e_1)}_{= -S(e_1,e_2)} + x_2y_2 S(e_2,e_2) =$

$\overset{2}{=} x_1y_1 \cdot 0 + x_1y_2 \cdot 1 + x_2y_1 (-1) + x_2y_2 \cdot 0 =$

$= x_1y_2 - x_2y_1 = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$

Orientovaný objem rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^3$

Rovnoběžnostěn je určen 3 vektory u, v, w:



Orientace vektorů je dána pravidlem pravé ruky.

Značíme $V(u,v,w)$ je orient. objem

Pravidla:

1. $V(e_1,e_2,e_3) = 1$
2. $V(u,v,w) = -V(v,u,w) = -V(w,v,u) = -V(u,w,v)$

   $\Longrightarrow \; V(u,u,w) = 0, \; V(u,v,u) = 0, \; V(u,v,v) = 0$
3. $V(cu,v,w) = cV(u,v,w) = V(u,cv,w) = V(u,v,cw)$
4. $V(u_1+u_2,v,w) = V(u_1,v,w) + V(u_2,v,w)$

Věta: Pro orientovaný objem rovnoběžnostěnu platí

$$V(u,v,w) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

kde $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

Dokazuje se stejně jako předchozí tvrzení.

Poznámka: Máme lin. zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = Ax$. Toto zobrazení zobrazí krychli danou vektory e_1, e_2, e_3 na rovnoběžnostěn $Ae_1 = s_1A$, $Ae_2 = s_2A$, $Ae_3 = s_3A$.

Krychle má orientovaný objem 1, rovnoběžnostěn má orient. objem $\det A$.

Pro orientovaný objem můžeme odvodit některé věci velice jednoduše, např. Cramerovo pravidlo.

$$A x = b \qquad \det A \neq 0 \qquad A \text{ matice } 3\times 3$$

$$x_1\, s_1A + x_2\, s_2A + x_3\, s_3A = b$$

$$V(x_1 s_1A + x_2 s_2A + x_3 s_3A,\ s_2A,\ s_3A) = V(b,\ s_2A,\ s_3A)$$

$$x_1 V(s_1A, s_2A, s_3A) + \underbrace{x_2 V(s_2A, s_2A, s_3A)}_{=0}$$

$$+ \underbrace{x_3 V(s_3A, s_2A, s_3A)}_{=0} = V(b, s_2A, s_3A)$$

$$x_1 \det A = \det(b\ \ s_2A\ \ s_3A)$$

$$x_1 = \frac{\det(b\ \ s_2A\ \ s_3A)}{\det A}$$

Teorie

1. Napište definici lin. nezávislosti vektorů:

Vektory $u_1, u_2, \ldots u_k$ ve vekt. prostoru U nad $\mathbb{K}$ jsou lin. nezávislé,

- jestliže pro všechna $a_1, a_2, \ldots a_k \in \mathbb{K}$ platí

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k = 0 \implies a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$$

- jestliže rovnice $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k = 0$ v neznámých $a_1, a_2, \ldots a_k$ má pouze jediné řešení $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$.

2. Geometricky popište, jak vypadají všechny vektorové podprostory vekt. prostoru $\mathbb{R}^3$.

$\{0\}$ počátek, přímky procházející počátkem, roviny procházející počátkem, celé $\mathbb{R}^3$

3. Napište přesnou formulaci věty o dimenzi jádra a obrazu lin. zobrazení.

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$ konečné dimenze, nechť V je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$ a nechť $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení. Potom platí

$$\dim_{\mathbb{K}} U = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi .$$

4. $\mathbb{C}_2[x]$ je prostor polynomů stupně nejvýše 2 s koeficienty v $\mathbb{C}$. Lze ho chápat také jako vekt. prostor nad $\mathbb{R}$. Napište nějakou jeho bázi.

Báze $\mathbb{C}_2[x]$ nad $\mathbb{R}$ je $1, i, x, ix, x^2, ix^2$.

$$(a_0 + i b_0) + (a_1 + i b_1)x + (a_2 + i b_2)x^2 \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

$$a_0 \underline{1} + b_0 \cdot \underline{i} + a_1 \underline{x} + b_1 \underline{(ix)} + a_2 \underline{x^2} + b_2 \underline{(ix^2)}$$

5. V priestore reálnych matíc 2x2 napíšte súradnice matice $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ v báze $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Súradnice sú $\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{pmatrix}$, kde

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \underset{1}{a_1}\overset{2}{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}} + \underset{0}{a_2}\overset{2}{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}} + \underset{3}{a_3}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \underset{-1}{a_4}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$1 = a_1$

$1 = 1 + a_2 \Rightarrow a_2 = 0$

$-1 = a_4$

$2 = a_3 - 1 \qquad a_3 = 3$

Súradnice sú

$$\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 3\\ -1\end{pmatrix}$$

6. Určíme $\varphi(x_1, x_2) = \dots\dots$ napište všechna lin. zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^1$

$$\varphi(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

7. Napište matici lin. zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(p) = \begin{pmatrix} p(2), p(0) \end{pmatrix}$ v bazích $\alpha = (1, x, x^2)$ a $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$(\varphi)_{B,\alpha} = \left((\varphi(1))_B \quad (\varphi(x))_B \quad (\varphi(x^2))_B \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_B \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}_B \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

8. Z definic dokažte: Součet vekt. podprostorů je vekt. podprostor.

Nechť U, V jsou podprostory vekt. prostoru W. Dokažme, že

$$U+V=\{ w \in W \mid \exists u \in U, \exists v \in V, w = u+v\}$$

je vekt. podprostor.

Jsou-li U, V neprázdné, je $U+V$ rovněž neprázdná.

Nechť x a $y \in U+V$, pak $x = u_1+v_1$, $y = u_2+v_2$, kde $u_1, u_2 \in U$, $v_1, v_2 \in V$.

Potom $x+y = u_1+v_1+u_2+v_2 = (u_1+u_2)+(v_1+v_2)$

Protože U a V jsou podprostory, je $u_1+u_2 \in U$, $v_1+v_2 \in V$. Proto $x+y \in U+V$.

Podobně pro násobek $a x$, $x \in U+V$.

9. Zformulujte přesně větu o dimenzi prostoru řešení homogenní soustavy.

Nechť A je matice $k \times n$ s prvky v $\mathbb{K}$. Pak řešení homogenní soustavy

$$Ax = 0$$

tvoří vekt. podprostor dimenze $n - h(A)$.

10. Z definice lin. obalu dokažte rovnost

$$[u_1, u_2, u_3] = [u_1, u_2 - u_1, u_1 + u_2 + 2u_3].$$

První dokážeme, že $[u_1, u_2 - u_1, u_1 + u_2 + 2u_3] \subseteq [u_1, u_2, u_3]$.

Platí $u_1, u_2 - u_1, u_1 + u_2 + 2u_3 \in [u_1, u_2, u_3]$.

Proto také lin. kombinace těchto tří vektorů leží v $[u_1, u_2, u_3]$.

Tedy $[u_1, u_2 - u_1, u_1 + u_2 + 2u_3] \subseteq [u_1, u_2, u_3]$.

12

Důkaz inkluse $[u_1, u_2, u_3] \subseteq [u_1, u_2 - u_1, u_1 + u_2 + 2u_3]$

Platí

$$u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot (u_2 - u_1) + 0 \cdot (u_1 + u_2 + 2u_3)$$

$$u_2 = 1 \cdot u_1 + 1 \cdot (u_2 - u_1) + 0 \cdot (u_1 + u_2 + 2u_3)$$

$$u_3 = (-1) u_1 + -\frac{1}{2} (u_2 - u_1) + \frac{1}{2} \cdot (u_1 + u_2 + 2u_3)$$

Proto $u_1, u_2, u_3 \in [u_1, u_2 - u_1, u_1 + u_2 + 2u_3]$

a tedy $[u_1, u_2, u_3] \subseteq [u_1, u_2 - u_1, u_1 + u_2 + 2u_3]$.

Početní část

1 Určete, pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ následující soustava

$$
\begin{aligned}
-2x + (1-a)y - 2z &= a \\
2x + y + az &= -2 \\
-2ax - ay - 4z &= 2+a
\end{aligned}
$$

(a) nemá žádné řešení

(b) má nekonečně mnoho řešení. V případě (b) soustavu vyřešte.

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
-2 & 1-a & -2 & a \\
2 & 1 & a & -2 \\
-2a & -a & -4 & 2+a
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c}
-2 & 1-a & -2 & a \\
0 & 2-a & a-2 & a-2 \\
0 & a^2-2a & 2(a-2) & (2-a)(1+a)
\end{array}\right)
$$

14

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1-a & -2 & a \\ 0 & 2-a & a-2 & a-2 \\ 0 & 0 & (a-2)(a+2) & 2-a \end{array}\right)$$

$a = -2$ poslední řádek je $0 \quad 0 \quad 0 \mid 4$

nemá řešení

$a = 2$ poslední řádek je $0 \quad 0 \quad 0 \mid 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x libovolné, z libovolné

$y = -2x - 2z - 2$

$(x, -2x-2z-2, z)$

2 Vypočítejte determinant matice

$$\begin{pmatrix} x & x+1 & x+1 & x+1 & x+1 & x+1 \\ x & x+1 & x+1 & x+1 & x+1 & 1 \\ x & x+1 & x+1 & x+1 & 1 & 0 \\ x & x+1 & x+1 & 1 & 0 & 0 \\ x & x+1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Postupným odečtením
2. řádku od 1.
3. řádku od 2.
. . . .
6. řádku od 5.
dostáváme, že determinant se rovná

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} = -x^6$$

3

Ve vekt. prostoru $\mathbb{R}_3[X]$ najděte bázi průniku a součtu podprostorů

$$U = [\, x^3 + x^2 + 1,\ x^3 - 1,\ 2x^3 + x^2 - 2x + 1 \,]$$

$$V = [\, x^3 + x^2 - 4x + 1,\ x^2 + 2x + 3 \,]$$

$$U \cap V = \{ p = a_1 (x^3 + x^2 + 1) + a_2 (x^3 - 1) + a_3 (2x^3 + x^2 - 2x + 1)$$
$$= b_1 (x^3 + x^2 - 4x + 1) + b_2 (x^2 + 2x + 3) \}$$

$$a_1 (\quad) + a_2 (\quad) + a_3 (\quad) - b_1 (\quad) - b_2 (\quad) = 0$$

Porovnáním koeficientů u $x^3, x^2, x, 1$ dostaneme 4 rovnice a 5 neznámých.

Řešení příslušné soustavy je

$$b_2 = t, \quad b_1 = t,$$

$$U \cap V = \{ t(x^3 + x^2 - 4x + 1) + t(x^2 + 2x + 3) \} =$$

$$= \{ t(x^3 + x^2 - 4x + 1 + x^2 + 2x + 3) \}$$

$$= [\, x^3 + 2x^2 - 2x + 4 \,]$$

je průnikem

Ze soustavy zjistíme rovněž, že

$$\dim U = 3, \quad \dim V = 2$$

$$\dim(U+V) + \dim(U \cap V) = \dim U + \dim V$$

$$4 \quad + \quad 1 \quad = \quad 3 + 2$$

$U+V \subseteq \mathbb{R}_3[x]$ a $\dim U+V = \dim \mathbb{R}_3[x] \Longrightarrow$

$U+V = \mathbb{R}_3[x]$, báze $U+V$ je $1, x, x^2, x^3$.

4. Lin. zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ splňuje

$$\varphi(1,1,2)^T = (2,3)^T, \quad \varphi(1,2,4)^T = (3,-1)^T, \quad \varphi(1,2,2)^T = (4,0)^T$$

Najděte matici A zobrazení, že

$$\varphi(x) = \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$A = (\varphi)_{\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3}$$

$$\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3) \text{ v } \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{E}_2 = (e_1, e_2) \text{ v } \mathbb{R}^2$$

$$\alpha = \left(\underset{u_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \underset{u_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}} \underset{u_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}} \right)$$

$$(\varphi)_{\mathcal{E}_2, \alpha} = \left((\varphi(u_1))_{\mathcal{E}_2}, (\varphi(u_2))_{\mathcal{E}_2}, (\varphi(u_3))_{\mathcal{E}_3} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = (\varphi)_{\varepsilon_2,\varepsilon_3} = (\varphi)_{\varepsilon_2,\alpha} \cdot (id)_{\alpha,\varepsilon_2}$$

$$= (\varphi)_{\varepsilon_2,\alpha} \cdot (id)^{-1}_{\varepsilon_2,\alpha}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

<u>jinak</u>: $s_1 A = \varphi(e_1)$, $s_2 A = \varphi(e_2)$, $s_3 A = \varphi(e_3)$

Spočítáme $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$.

$$\left(\begin{array}{c|c} u & \varphi(u) \\ \hline u_1 & \varphi(u_1) \\ u_2 & \varphi(u_2) \\ u_3 & \varphi(u_3) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{úpravy}}{\overset{\text{řádk.}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|cc} \multicolumn{3}{c|}{u} & \multicolumn{2}{c}{\varphi(u)} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

20

Matice A bude

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/2 \\ 7 & -3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Zkouška

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

✓