Matice a operace s nimi

Matice $A = (a_{ij})$ tabulka rozměrů $n \times k$ tvořená čísly.

a_{ij} = číslo v i-tém řádku a j-tém sloupci

$a_{ij} \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Matice rozměrů $1 \times k$

počet řádků — počet sloupců

nazýváme řádkové vektory $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_k)$

Matice rozměru $n \times 1$ nazýváme sloupcové vektory

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$ matice 2×3

počet riadkov — počet stĺpcov

Sčítanie matíc – môžeme sčítať matice rovnakých rozmerov, a to takto

$$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij})$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Hovoríme, že sčítanie prebieha po zložkách

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 6 & -9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & +2 & 11 \\ 7 & -11 & 8 \end{pmatrix}$$

<u>Vlastnosti sčítání matic</u> , $A, B, C \in Mat_{n \times k}(\mathbb{K})$

$$A + B = B + A$$ komutativní

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$ asociativní

Existuje nulová matice rozměrů $n \times k$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \qquad A + O = A$$

Opačná matice k matici A je $-A = (-a_{ij})$
když $A = (a_{ij})$

$$A + (-A) = O$$

Násobení matice číslem $c \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$A = (a_{ij}) \qquad (cA) = (c\,a_{ij})$

Dostáváme zobrazení

násobení číslem: $\mathbb{K} \times \mathrm{Mat}_{m \times k}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m \times k}(\mathbb{K})$

$(c, A) \in \mathbb{K} \times \mathrm{Mat}_{m \times k}(\mathbb{K})$ přiřadíme $cA \in \mathrm{Mat}_{m \times k}(\mathbb{K})$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -8 & 16 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ -24 & 48 & 12 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti násobení čísla a matice:

- $c \cdot (A+B) = (cA)+(cB)$ pravou stranu píšeme bez závorek $cA + cB$
- $(c+d)A = cA + dA$
- $(c \cdot d)A = c(dA)$
- $1 \cdot A = A$

Násobení matic

Motivace

soustava jedné rovnice o n neznámých

$$(*) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

Rovnice o jedné neznámé má tvar násobení

$$a x = b$$

Chceme, aby rovnice (*) byla také ve tvaru násobení.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \underset{\text{def}}{=} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

<u>Definice</u>: Součin matice $(a_1, a_2, \dots a_n)$ a matice $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ je

$$(a_1 \dots a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Sumu zpravidla zapisujeme zkráceně

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Výsledkem tohoto násobení je matice typu 1×1.

Násobení: $Mat_{1\times n}(\mathbb{K}) \times Mat_{n\times 1}(\mathbb{K})$

$\longrightarrow Mat_{1\times 1}(\mathbb{K})$

Soustava k-rovnic o n neznámých – levá strana

$$
(*) \qquad
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\
\dots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n
\end{array}
$$

Chtěli bychom psát (*) jako násobení

$$A \cdot X$$

kde
$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}
\qquad
X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

<u>Definice</u> $A = (a_{ij})$ typu $k \times n$, $x = (x_j)$ typu $n \times 1$.

Řádky matice A jsou $\begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_2(A) \\ \vdots \\ r_k(A) \end{pmatrix}$

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} r_1(A) \cdot x \\ r_2(A) \cdot x \\ \vdots \\ r_k(A) \cdot x \end{pmatrix} \qquad (A \cdot x)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$$= a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Násobení matic obecně

$A = (a_{ij})$ je matice typu $k \times n$

$B = (b_{j\ell})$ je matice typu $n \times p$

$A \cdot B$ je matice typu $k \times p$

$$(A \cdot B)_{i\ell} = r_i(A) \cdot s_\ell(B)$$

i-tý řádek matice A

ℓ-tý sloupec matice B

Jinak napsáno

$$(A \cdot B)_{il} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, b_{jl} = a_{i1} b_{1l} + a_{i2} b_{2l} + \dots$$

$$\dots + a_{im}\, b_{ml}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 9 & 17 \\ 0 & 17 & 19 \end{pmatrix}$$

Příklady

$A = (a_{ij})$ typu $k \times n$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} = s_1(A)$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \to j\text{-té místo}$$

$$A \cdot e_j = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = s_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{kj} \end{pmatrix}$$

---

2. příklad

$$\underbrace{(1 \;\; 0 \;\; 0 \; \dots \; 0)}_{k} \; A = (a_{11} \;\; a_{12} \; \dots \; a_{1n})$$

matice typu $k \times n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix} = r_1(A)$$

i-tém místě

$$(0, 0, \dots 0 \, 1 \, 0 \dots 0) \, A = r_i(A)$$

Jednotková matice řádu $k \times k$ je

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

A je matice řádu $k \times n$

$$E_k \cdot A = \begin{pmatrix} r_1(E_k) \cdot A \\ r_2(E_k) \cdot A \\ \vdots \\ r_k(E_k) \cdot A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_2(A) \\ \vdots \\ r_k(A) \end{pmatrix} = A$$

Násobení jednotkovou maticí zprava

A typu $k \times n$ $\qquad E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ typu $n \times n$

$$A \cdot E_n = A\,(e_1\ e_2 \dots e_n) = (Ae_1, Ae_2, \dots A \cdot e_n)$$

$$= \left(s_1(A), s_2(A), \dots, s_n(A)\right) = A$$

Vlastnosti násobení

- není komutativní

(1) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$ má smysl

ale $$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$ není definováno

(2) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \\ 18 & 27 & 36 \end{pmatrix}$$

(3)
$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$$

- je asociativní
$$\underbrace{\underbrace{(\underset{k\times n}{A}\cdot\underset{n\times p}{B})}_{k\times p}\cdot\underset{p\times q}{C}}_{k\times q} = \underbrace{\underset{k\times n}{A}\cdot\underbrace{(\underset{n\times p}{B}\cdot\underset{p\times q}{C})}_{n\times q}}_{k\times q}$$

- je distributivní vzhledem ke sčítání
A, B matice typu $n\times k$, C matice typu $k\times p$
$$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$$

$$
\begin{aligned}
\left[(A+B)\cdot C\right]_{il} &= \sum_{j=1}^{k} (A+B)_{ij} \cdot C_{jl} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left(A_{ij} + B_{ij}\right) \cdot C_{jl} = \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left(A_{ij} \cdot C_{jl} + B_{ij} C_{jl}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} A_{ij} C_{jl} + \sum_{j=1}^{k} B_{ij} C_{jl} \\
&= (A\cdot C)_{il} + (BC)_{il} = \\
&= (A\cdot C + B\cdot C)_{il}
\end{aligned}
$$

Pište inverzní matice k A ...... A^{-1}

$$A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$$

Transponovaná matice k matici A typu $k \times n$ je matice A^T typu $n \times k$

$$\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Platí

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(cA)^T = c\,A^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T A^T$$

A typu $k \times n$, B typu $n \times p$

$A \cdot B$ je typu $k \times p$, $(A \cdot B)^T$ je typu $\underline{\underline{p \times k}}$

A^T typu $n \times k$, B^T typu $p \times n$

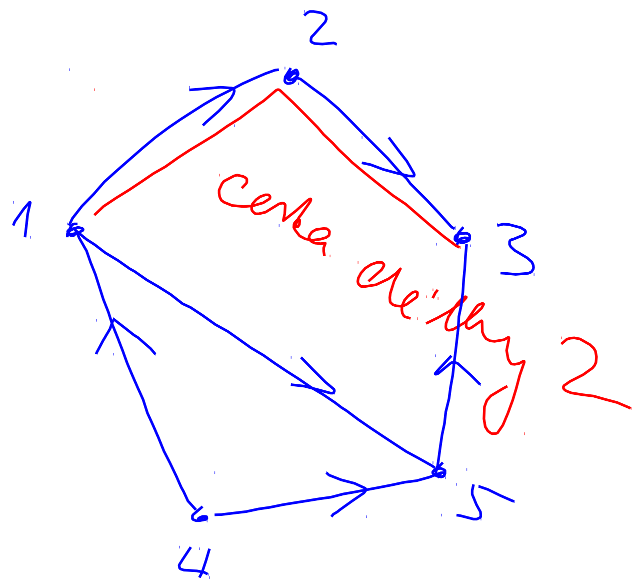
$A^T \cdot B^T$ obecně nelze násobit když $k \neq p$.

$B^T \cdot A^T$ lze vždy násobit, je to matice typu $\underline{\underline{p \times k}}$

Aplikace násobení matic

① Orientovaný graf

uzly
orientované hrany



Popíšeme ho maticí 5×5

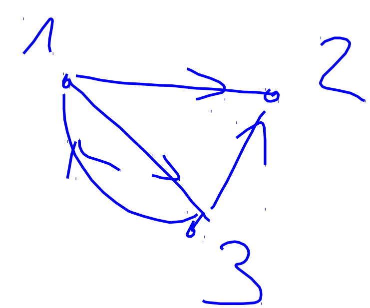
$$A = (A_{ij})$$

$A_{ij} = 1$ je-li v grafu hrana z i do j

0 v opačném případě

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Cesta z vrcholu i do vrcholu j délky 2 je posloupnost orientovaných hran $(i\ k)\ (k\ j)$

– délky 3 $(i\ k_1)\ (k_1\ k_2)\ (k_2\ j)$

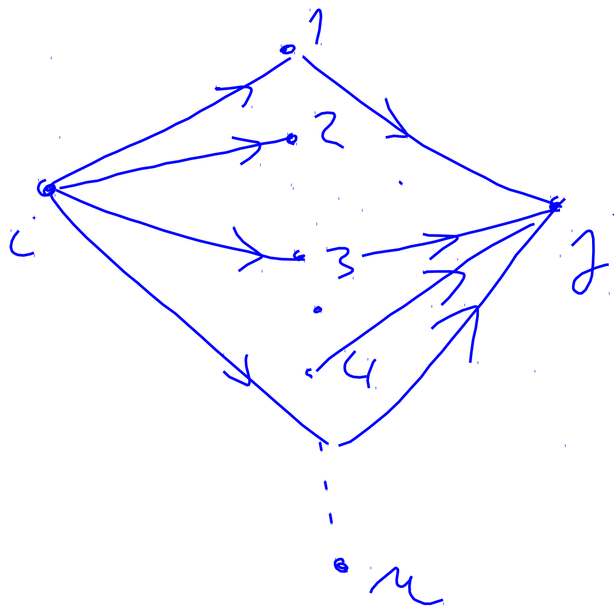
Vynásobíme z předchozího příkladu

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A\cdot A = A^2$

$(A^2)_{ij}$ = počet cest délky 2 z vrcholu i do vrcholu j

A_{ij}



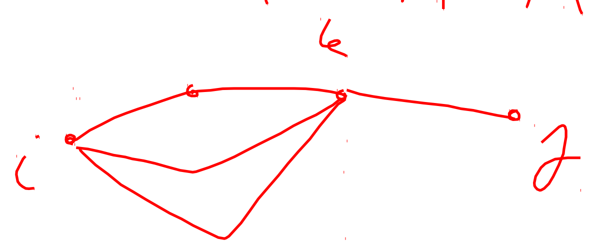
$$(A^2)_{ij} = \overset{1\cdot 1}{A_{i1}\cdot A_{1j}} + \overset{1\cdot 0}{A_{i2}\cdot A_{2j}} + \dots + \underset{1\cdot 1}{A_{in}A_{nj}}$$

= počet cest délky 2 z i do j

$A^3 = A\cdot A\cdot A$

$(A^3)_{ij}$ ... počet cest délky 3 z i do j

$A^3 = A^2\cdot A$



Zkoumáme proces který má n stavů

Stavy 1, 2, 3, ... n

$P = (p_{ij})$ p_{ij} = pravděpodobnost, že se ze stavu j dostaneme do stavu i

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 3/8 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 1/2 & 1/8 & 1/4 \\ 1/8 & 0 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Proces pokračuje v krocích. Na začátku jsme např. ve stavu 3.

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{stav } 3$$

Pravděpodobnost, že budeme po 1. kroku ve stavu i je dána sloupcem

$$P \cdot X = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 0 \\ 1/8 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Po 2. kroku

$$P \cdot (P X) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

sloupec zachycuje pravděpodobnost, že po 2. kroku budeme ve stavu i s pravděpodobností y_i