Zkoušková písemka z Geometrie 2
Varianta V

Datum: 24. 12. 2015
Jméno: Ježíšek

1	2	3	4	Σ
5	5	5	5	**20**

---

1) (5×1 b.) *Udejte příklad (pokud takový příklad neexistuje, podejte stručné vysvětlení, proč):*

(a) *dvou přímek v $\mathcal{E}_3$ s odchylkou $\frac{\pi}{3}$;*
(b) *nadrovinu v $\mathcal{A}_3$, která odděluje body $[5,5,-3]$ a $[2,4,-5]$;*
(c) *dvou mimoběžných rovin v $\mathcal{A}_5$, které nemají žádný společný směr;*
(d) *tří bodů A, B, C v $\mathcal{E}_2$ takových, že obsah rovnoběžníku $ABCD$ je roven 4;*
(e) *dvou afinních podprostorů $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ v $\mathcal{A}_3$ takových, že $\dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{V}) \neq \dim(\mathcal{U} + \mathcal{V})$.*

2) (5 b.) *V $\mathcal{A}_4$ jsou dány podprostory $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 : x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 9 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_4 - 11 &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_2 : X = [5,5,3,2] + s(1,1,-2,-2) + t(3,1,0,4)$$

*Určete polohu obou podprostorů a **neparametricky** vyjádřete jejich součet.*

3) *V $\mathcal{E}_3$ jsou dány přímky $p : X = [3,2,-1] + s(2,0,1)$ a $q : X = [4,-2,2] + t(1,-1,5)$.*

(a) (1 b.) *Dokažte, že jsou přímky p a q mimoběžné.*
(b) (1 b.) *Určete odchylku přímek p a q.*
(c) (3 b.) *Parametricky vyjádřete přímku r, která je různoběžná s p a q a prochází bodem $M[-3,2,4]$.*

4) *Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, kde $|AB| = |AV| = 8\,\mathrm{cm}$.*

(a) (1 b.) *Jehlan vhodně umístěte do kartézské soustavy souřadnic.*
(b) (1 b.) *Určete odchylku stěn ABV a BCV.*
(c) (1 b.) *Určete vzdálenost bodu D od roviny stěny BCV.*
(d) (2 b.) *Určete vzdálenost hrany AV a úhlopříčky BD.*

---

1. (a) Obě dvě přímky umístíme do roviny $z = 0$ a pro jednoduchost budou obě procházet počátkem. Stačí proto najít dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ takové, že jejich odchylka bude $\frac{\pi}{3}$. Z definice odchylky proto musí platit $\frac{1}{2} = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{||\mathbf{u}||\cdot||\mathbf{v}||}$. Zvolme např. $\mathbf{u} = (1,0,0)$; pak musí platit $||\mathbf{v}|| = 2$ a $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = 1$. Odsud např. $\mathbf{v} = (1, \sqrt{3}, 0)$. Příkladem takové dvojice jsou proto přímky $p : X = [0,0,0] + s(1,0,0)$ a $q : X = [0,0,0] + s(1,\sqrt{3},0)$.

   Jiné řešení pro ty, co mají radši analýzu. Opět umístíme obě přímky do roviny $z = 0$ a pro jednoduchost budou obě procházet počátkem. Položíme $p : y = 0, z = 0$ (tj. p je vlastně osa x). Z analýzy víme, že směrnice přímky je tangens směrového úhlu (ten vezmeme za odchylku), tj. směrnice hledané přímky q bude rovna $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$. Proto $q : y - x\sqrt{3} = 0, z = 0$. Zdůrazněme, že přímku v $\mathcal{E}_3$ musí charakterizovat dvě neparametrické rovnice, proto je dodatek $z = 0$ nedílnou součástí řešení.

   (b) Z věty 9.8 plyne, že pokud nadrovina odděluje dva body, musí se po dosazení souřadnic těchto bodů do neparametrického vyjádření nadroviny lišit výsledky znaménkem. Proto stačí vzít např. nadrovinu $\alpha : x - 3 = 0$, protože po postupném dosazení souřadnic obou bodů do rovnice vyjde nejdříve 2 a pak -1.

   (c) Učebnicový příklad: $\varrho : X = [0,0,0,0,0] + t(1,0,0,0,0) + s(0,1,0,0,0)$ a $\sigma : X = [0,0,1,0,0] + t(0,0,0,1,0) + s(0,0,0,0,1)$.

   (d) Zvolme pro jednoduchost body A, B, C tak, aby určovaly čtverec o obsahu 4. Např. $A[0,0], B[2,0], C[0,2]$.

(e) Takovým příkladem jsou v $\mathcal{A}_3$ např. dvě mimoběžky (viz např. poznámka 6.7). Proto může být $\mathcal{B}_1 : X = [0,0,0] + t(1,0,0)$ a $\mathcal{B}_2 : X = [0,1,0] + t(0,0,1)$.

2. Nejprve převedeme vyjádření $\mathcal{B}_1$ na parametrické. Prakticky to uděláme vyřešením soustavy, kterou je $\mathcal{B}_1$ zadán.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 9 \\ 3 & -5 & 0 & -1 & 11 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & 8 \end{array}\right)$$

Za parametr zvolíme druhou a třetí neznámou, řešení nám proto vychází tvaru $(3s + t + 1, s, t, 4s + 3t - 8)$, tedy $\mathcal{B}_1 : X = [1,0,0,-8] + s(3,1,0,4) + t(1,0,1,3)$. Jako zkoušku můžeme ověřit, že souřadnice bodu vyhovují původním rovnicím a souřadnice obou vektorů vyhovují původním zhomogenizovaným rovnicím (tj. bez absolutního členu).

Nyní nasadíme známý algoritmus pro zjištění polohy dvou podprostorů.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 3 & 10 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 14 & 23 \end{array}\right)$$

Z tvaru upravené matice můžeme říct, že oba prostory jsou rovnoběžné různé. Dále můžeme vyjádřit parametricky součet obou podprostorů (báze zaměření součtů jsou nenulové řádky v upravené matici, jako bod zvolíme např. $[1,0,0,-8]$ – může to být i kterýkoliv jiný bod $\mathcal{B}_1$ nebo $\mathcal{B}_2$). Tedy:

$$\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 : X = [1,0,0,-8] + r(1,1,-2,-2) + s(0,1,-3,-5) + t(0,0,14,23)$$

Nyní toto vyjádření převedeme na neparametrické – prakticky to znamená vyřešit soustavu homogenních rovnic, jejichž koeficienty tvoří souřadnice směrových vektorů, provést nezávislou volbu proměnných a dopočítat absolutní člen dosazením bodu $[1,0,0,-8]$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 23 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení dostáváme ve tvaru $(-\frac{19}{14}t, \frac{1}{14}t, -\frac{23}{14}t, t)$. Zvolením $t = -14$ dostáváme vektor $(19, -1, 23, -14)$, který je vlastně normálovým vektorem součtu $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$ (můžeme pro zkoušku ověřit, zda je kolmý na všechny směrové vektory). Neparametrické vyjádření je proto tvaru:

$$\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 : 19x_1 - x_2 + 23x_3 - 14x_4 + d = 0$$

Dosazením bodu $[1,0,0,-8]$ do rovnice zjistíme, že $d = -131$, tedy neparametrické vyjádření součtu je tvaru:

$$\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 : 19x_1 - x_2 + 23x_3 - 14x_4 - 131 = 0$$

3. (a) Na první pohled lze vidět, že přímky nejsou rovnoběžné, takže stačí akorát ověřit, že nejsou různoběžné. Můžeme proto ověřit, že průnik obou přímek je prázdný, kratší však bude ověřit mimoběžnost algoritmem na zjišťování polohy podprostorů.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -4 & 3 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -9 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Protože poslední řádek zůstal úpravami nenulový, obě přímky jsou mimoběžné.

Trikově: Již jsme řekli, že stačí ověřit, že přímky nejsou různoběžné. Lze vidět, že každý bod přímky p musí mít druhou souřadnici rovnu 2. Bod na přímce q, který má druhou souřadnici 2 je bod $[0, 2, -18]$ a jde hned vidět, že tento neleží na přímce p (neexistuje příslušný parametr). Není snad nutno dodávat, že tento postup jde použít jen ve speciálním případě a rozhodně jej nelze aplikovat obecně.

(b) Dosazením do vzorce (na písemce stačí výsledek uvést v tomto tvaru):

$$\cos\varphi = \frac{|(1,-1,5)\cdot(2,0,1)|}{||(1,-1,5)||\cdot||(2,0,1)||} = \frac{7}{\sqrt{27\cdot 5}} = \frac{7\sqrt{15}}{45}$$

(c) Hledáme vlastně příčku mimoběžek p, q procházející bodem M.

Bod M a přímka p zadávají rovinu α, která protíná přímku q v jistém bodě Q – ten bude průsečíkem hledané příčky s přímkou q. Parametrické vyjádření roviny α je tedy zřejmě $\alpha : X = [3, 2, -1] + s(2, 0, 1) + t(6, 0, -5)$, kde vektor $(6, 0, -5)$ vznikl z bodu $[3, 2, -1]$ a bodu M. Protože $(2, 0, 1) \times (6, 0, -5) = (0, -4, 0)$[1] a $[3, 2, -1] \in \alpha$, obecná rovnice roviny α je $y - 2 = 0$. Dosadíme $y = 2$ do parametrického vyjádření přímky q a vypočteme parametr t.

$$\begin{aligned} 2 &= -2 - t \\ t &= -4 \end{aligned}$$

Platí tedy $Q = [4, -2, 2] - 4(1, -1, 5) = [0, 2, -18]$. Pak je přímka r zadána dvěma body Q a M a můžeme ji parametricky vyjádřit.

$$r : X = [0, 2, -18] + a(3, 0, -22)$$

4. (a) Podstavu jehlanu umístíme následovně: $A[0, 0, 0], B[8, 0, 0], C[0, 8, 0], D[8, 8, 0]$. Střed čtverce $ABCD$ označme S – jeho souřadnice jsou zřejmě $S[4, 4, 0]$. První dvě souřadnice vrcholu V jsou stejné, jako u S; třetí souřadnici vypočteme z Pythagorovy věty (trojúhelník ASV, jehož přepona je dlouhá 8 cm a jedna z odvěsen $\frac{8\sqrt{2}}{2}$ cm – polovina úhlopříčky čtverce $ABCD$):

$$z = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2}$$

Tedy $V[4, 4, 4\sqrt{2}]$.

(b) Odchylku dvou rovin převedeme na odchylku jejich normálových vektorů (viz věta 16.5). Proto nám stačí zjistit normálové vektory obou rovin, které spočítáme postupně vektorovým součinem.

i. *Normálový vektor roviny ABV.* Platí $\overrightarrow{AB} = B - A = (8, 0, 0)$ a $\overrightarrow{AV} = V - A = (4, 4, 4\sqrt{2})$. Pak (pro zjednodušení vektory vhodně upravíme) $(1, 0, 0) \times (1, 1, \sqrt{2}) = (0, \sqrt{2}, -1)$.

ii. *Normálový vektor roviny BCV.* Platí $\overrightarrow{BC} = C - B = (-8, 8, 0)$ a $\overrightarrow{BV} = V - B = (-4, 4, 4\sqrt{2})$. Pak (pro zjednodušení vektory vhodně upravíme) $(1, -1, 0) \times (1, -1, -\sqrt{2}) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$.

Dosazením do vzorce:

$$\cos\varphi = \frac{|(0,\sqrt{2},-1)\cdot(\sqrt{2},\sqrt{2},0)|}{||(0,\sqrt{2},-1)||\cdot||(\sqrt{2},\sqrt{2},0)||} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

[1] Lze dále upravit na příjemnější $(0, 1, 0)$.

(c) Využijeme vzorce uvedeného ve větě 15.4. Nejprve však vyjádříme rovinu BCV obecnou rovnicí. Z minulého příkladu známe normálový vektor této roviny, tj. její obecná rovnice bude tvaru (po vhodném upravení) $x + y + d = 0$. Po dosazení souřadnic libovolného bodu roviny zjistíme, že $d = -8$, tj. $\overleftrightarrow{BCV} : x + y - 8 = 0$.

Dále dosazením do vzorce:

$$v(D, \overleftrightarrow{BCV}) = \frac{|8 + 8 - 8|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 4\sqrt{2}$$

(d) Pro výpočet vzdálenosti obou (zjevně) mimoběžek využijeme vzorec uvedený ve větě 15.3. Označme $\mathbf{u}$ směrový vektor přímky AV, $\mathbf{v}$ směrový vektor přímky BD a $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$. Pak $\mathbf{u} = (4, 4, 4\sqrt{2})$, $\mathbf{v} = (0, 8, 0)$ a $\mathbf{w} = (8, 0, 0)$. Nyní můžeme dosadit do vzorce:

$$v(\overleftrightarrow{AV}, \overleftrightarrow{BD}) = \frac{\sqrt{G(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})}}{\sqrt{G(\mathbf{u}, \mathbf{v})}} = \frac{|[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]|}{\sqrt{G(\mathbf{u}, \mathbf{v})}}$$

$$|[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]| = \left| \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4\sqrt{2} \\ 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right| = 256$$

$$\sqrt{G(\mathbf{u}, \mathbf{v})} = \sqrt{\begin{vmatrix} 64 & 32 \\ 32 & 64 \end{vmatrix}} = 32\sqrt{3}$$

$$v(\overleftrightarrow{AV}, \overleftrightarrow{BD}) = \frac{|[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]|}{\sqrt{G(\mathbf{u}, \mathbf{v})}} = \frac{256}{32\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$