Rovnoběžnostěn

3) *V $\mathcal{A}_3$ jsou dány čtyři body $A[4,2,-3], B[1,3,0], C[0,-2,1], E[-1,1,-2]$, jež jsou vrcholy rovnoběžnostěnu.*

(a) (1 b.) *Určete souřadnice zbývajících vrcholů rovnoběžnostěnu;*
(b) (1 b.) *Zjistěte, zda je rovina $\varrho: 3x+2y+3z-6=0$ řezovou rovinou tělesa;*
(c) (1 b.) *Určete těžiště T čtyřstěnu $ABCE$;*
(d) (2 b.) *Určete, zda bod $M[3,0,1]$ leží uvnitř nebo vně rovnoběžnostěnu.*

Řešení

(a) určíme vektory $\overrightarrow{AB}=(-3,1,3)$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=(-1,-5,1)$, $\overrightarrow{AE}=(-5,-1,1)$.
Zbylé body určíme například takto:
$D=A+\overrightarrow{BC}=[3,-3,-2]$
$F=B+\overrightarrow{AE}=[-4,2,1]$
$G=C+\overrightarrow{AE}=[-5,-3,2]$
$H=D+\overrightarrow{AE}=[-2,-4,-1]$

(b) Rovina rozděluje prostor na dva poloprostory. Je-li rovina ϱ řezovou rovinou, pak některé z vrcholů rovnoběžnostěnu leží v jednom poloprostoru a minimálně jeden vrchol ve druhém poloprostoru jí určeném, tzn. existuje alespoň jedna dvojice vrcholů, které jsou oddělovány rovinou ϱ. Stačí tedy dosadit souřadnice vrcholů do rovnice roviny a zjistit znamínka výrazů:
$A: 12+4-9-6=1$
$B: 3+6-6=3$
$C: -4+3-6=-7$
$\vdots$
Tedy například body A a C nebo body B a C jsou oddělovány naší (nad)rovinou ϱ a rovina náš rovnoběžnostěn řeže.
Rovina se samozřejmě může tělesa pouze dotýkat, což můžeme rozdělit do tří následujících případů:

(a) rovina se dotýká tělesa v jednom z vrcholů
(b) rovina se tělesa dotýká podél jedné hrany
(c) rovina se dotýká tělesa podél celé stěny

To nastane při splnění následujících podmínek:

(a) právě jeden z vrcholů leží v rovině (po dosazení je výraz roven nule) A ZÁROVEŇ všechny zbývající vrcholy leží v jednom poloprostoru (není žádná dvojice vrcholů, která by byla rovinou oddělována)
(b) právě dva vrcholy ležící na jedné hraně leží v rovině A ZÁROVEŇ všechny zbylé vrcholy leží ve stejném poloprostoru
(c) nalezneme tři (respektive čtyři) vrcholy, které leží v zadané rovině. Je-li těleso konvexní, pak zbylé vrcholy nutně musí všechny ležet ve stejném poloprostoru.

(c) Těžištěm úsečky AB je její střed $S=\frac{1}{2}(A+B)$
Těžištěm libovolného trojúhelníka ABC je bod $T=\frac{1}{3}(A+B+C)$
Těžištěm libovolného čtyřstěnu ABCD je bod $T=\frac{1}{4}(A+B+C+D)$ Těžištěm našeho čtyřstěnu ABCE je tedy bod $[1,1,-1]$.

(d) Rovnoběžnostěn je konvexní množina a mnohostěn, a platí pro něj tedy například věta 10.4 a následující odstavce ve skriptech. Pro zjištění, zda bod M leží uvnitř mnohostěnu můžeme použít postup, který je popsán třeba v Úloze 10.1. Stačí ověřit tedy následující rovnosti a nerovnosti:

$$M=aA+bB+cC+dD+eE+fF+gG+hH,$$
$$\text{kde } a+b+c+d+e+f+g+h=1, a\geq 0, b\geq 0, \ldots, h\geq 0.$$

Rozepíšeme-li tedy první rovnost po souřadnicích a přidáme-li druhou rovnost, dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
3= & 4a & +b & & +3d & -e & -4f & -5g & -2h \\
0= & 2a & +3b & -2c & -3d & +e & +2f & -3g & -h \\
1= & -3a & & +c & -2d & -2e & +f & +2g & -h \\
1= & a & +b & +c & +d & +e & +f & +g & h
\end{array}$$

V řešení soustavy se nám objeví spoustu parametrů, pomocí nichž vyjádříme neznámé. Neznámé zároveň musí být všechny větší než 0. Můžeme zjistit, jestli některé hodnoty parametrů vůbec splňují dané nerovnosti. Pokud ano, bod M leží uvnitř, pokud žádné hodnoty parametrů nerovnosti nesplňují, M je vně. Vzhledem k počtu parametrů není tento postup příliš vhodný.

KDY BY SE TAKOVÝ POSTUP HODIL: pokud bychom měli zjišťovat, zda M leží uvnitř čtyřstěnu (simplexu) ABCE. Po rozepsání rovnice $M = aA + bB + cC + eE$ po souřadnicích a přidání zbylé rovnice z podmínek totiž dostaneme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých. Řešení této rovnice prověříme ještě nerovnicemi. Změňme si tedy zadání a ukažme si, jak by to vypadalo:

V $\mathcal{A}_3$ jsou dány čtyři body $A[4,2,-3], B[1,3,0], C[0,-2,1], E[-1,1,-2]$, jež jsou vrcholy čtyřstěnu. Určete, zda bod $M[3,0,1]$ leží uvnitř nebo vně čtyřstěnu.
Budeme ověřovat, zda existují reálná čísla a, b, c, e splňující následující podmínky:

$$\begin{gathered}
M = aA + bB + cC + eE, \\
\text{kde } a + b + c + e = 1, \\
a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, e \geq 0.
\end{gathered}$$

Rozepíšeme a dostaneme soustavu:

$$\begin{array}{rrrrr}
3= & 4a & +b & & -e \\
0= & 2a & +3b & -2c & +e \\
1= & -3a & & +c & -2e \\
1= & a & +b & +c & +e
\end{array}$$

Soustava nemá řešení, tudíž čísla a, b, c, e neexistují a M uvnitř čtyřstěnu neleží. (Pokud by náhodou řešení existovalo, muselo by vyhovovat ještě nerovnostem, abychom mohli prohlásit, že M leží uvnitř)

Co tedy s polohou M vůči rovnoběžnostěnu?

Podle definice 10.4. lze náš rovnoběžnostěn zapsat jako množinu bodů tvaru $X = A + a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD} + c\overrightarrow{AE}$, kde $0 \leq a, b, c \leq 1$.
Zkusíme tedy, jestli M těmto podmínkám vyhovuje, rozepíšeme po souřadnicích a dostaneme následující soustavu:

$$\begin{array}{rrrrr}
3= & 4 & -3a & -b & -5c \\
0= & 2 & +a & -5b & -c \\
1= & -3 & +3a & +b & +c
\end{array}$$

Řešením je $a = \frac{21}{16}, b = \frac{13}{16}, c = -\frac{3}{4}$. Protože $c = -\frac{3}{4}$ nevyhovuje podmínce $0 \leq c \leq 1$, leží M mimo rovnoběžnostěn.

Co čísla a, b, c ve skutečnosti znamenají?

Pokud si můžeme vybrat, vždycky si rovnoběžnostěn umisťujeme do soustavy souřadnic

„rozumně“, tj. volíme takový repér, který má počátek v jednom z vrcholů rovnoběžnostěnu a bázové vektory shodné s „vektory hran“, nejčastěji tedy repér $\left\langle A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE} \right\rangle$.
Vyjádříme-li vrcholy rovnoběžnostěnu v tomto repéru, budou se v jejich souřadnicích vyskytovat jenom 1 a 0:

- $A = [0, 0, 0]$
- $B = A + 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE} = [1, 0, 0]$
- $C = A + 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE} = [1, 1, 0]$
- $D = A + 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE} = [0, 1, 0]$
- $E = A + 0\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE} = [0, 0, 1]$
- $F = A + 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE} = [1, 0, 1]$
- $G = A + 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE} = [1, 1, 1]$
- $H = A + 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE} = [0, 1, 1]$

Jaké souřadnice budou mít:

(a) body na hranách?
(b) body ve stěnách?
(c) vnitřní bod rovnoběžnostěnu?

Pojďme si nějaké vyjádřit. Při nejasnostech si zkuste nakreslit obrázek a představit si, jak se po tělese budete pohybovat.

(A) Hrany
- Vnitřní bod K hrany BC má jistě souřadnice $K = A + 1\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE} = [0, k, 1]$, kde $0 < k < 1$ (pro rovnost $k = 0$ nebo $k = 1$ dostanu přímo souřadnice vrcholů B nebo C
- Vnitřní bod L hrany GH má jistě souřadnice $L = A + l\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE} = [l, 1, 1]$, kde $0 < l < 1$ (pro rovnost $l = 0$ nebo $l = 1$ dostanu přímo souřadnice vrcholů H nebo G

(B) Stěny
- Vnitřní bod J stěny ABCD má souřadnice $J = A + a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE} = [a, b, 1]$, kde $0 < a, b < 1$
- Vnitřní bod N stěny BCGF má souřadnice $N = A + 1\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AD} + d\overrightarrow{AE} = [1, c, d]$, kde $0 < c, d < 1$

(C) Vnitřní bod
- Libovolný vnitřní bod X bude mít souřadnice souřadnice $X = A + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} + z\overrightarrow{AE} = [x, y, z]$, kde $0 < x, y, z < 1$ (nastane-li u některé souřadnice rovnost, je bod X na povrchu tělesa, tedy ve stěně nebo na hraně tělesa)

Dostali jsme se tak vlastně zpět k výše zmíněnému vyjádření rovnoběžnostěnu.

Zjišťujeme-li polohu M vůči rovnoběžnostěnu, můžeme to vlastně pochopit i jako úkol „*Zjistěte souřadnice bodu M vůči repéru* $\left\langle A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE} \right\rangle$“.

Souřadnice bodu M jsou vlastně souřadnice vektoru $\overrightarrow{AM}$ (protože A je počátek našeho „rovnoběžnostěnového repéru“. Každý vektor můžeme jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci bázových vektorů, tedy $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD} + c\overrightarrow{AE} = (a, b, c)$. Přitom čísla a, b, c nejsou závislá na tom, vůči jakému původnímu repéru/bázi máme vektory $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ a zejména $\overrightarrow{AM}$ vyjádřeny (vzpomeňte si například, jak jsme hledali matici přechodu, tam jsme to dokazovali).
Vyjádříme si tedy všechny čtyři vektory v té bázi, v jaké jsou v zadání příkladu:

- $\overrightarrow{AB} = (-3, 1, 3)$,
- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (-1, -5, 1)$,
- $\overrightarrow{AE} = (-5, -1, 1)$
- $\overrightarrow{AM} = (-1, -2, 4)$

Po souřadnicích rozepíšeme rovnici $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD} + c\overrightarrow{AE}$:

$$\begin{aligned} -1 &= -3a \quad -b \quad -5c \\ -2 &= \quad a \quad -5b \quad -c \\ 4 &= +3a \quad +b \quad +c \end{aligned}$$

Řešením jsou nám už známá čísla $a = \frac{21}{16}, b = \frac{13}{16}, c = -\frac{3}{4}$. Z celé předchozí konstrukce pak plyne, proč pro vnitřní body mnohostěnu platí $0 \leq a, b, c, \leq 1$ a proč je tedy náš bod M vně.