PRŮNIK POLOROVIN

$H = \{h_1, h_2, \dots h_n\}$ n polorovin

Průnik hledáme metodou rozděl a panuj

$H_1 = \{h_1, \dots h_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\}$ $H_2 = \{h_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}, \dots h_n\}$

$C_1 = \bigcap_{h_i \in H_1} h_i$ $C_2 = \bigcap_{h_i \in H_2} h_i$

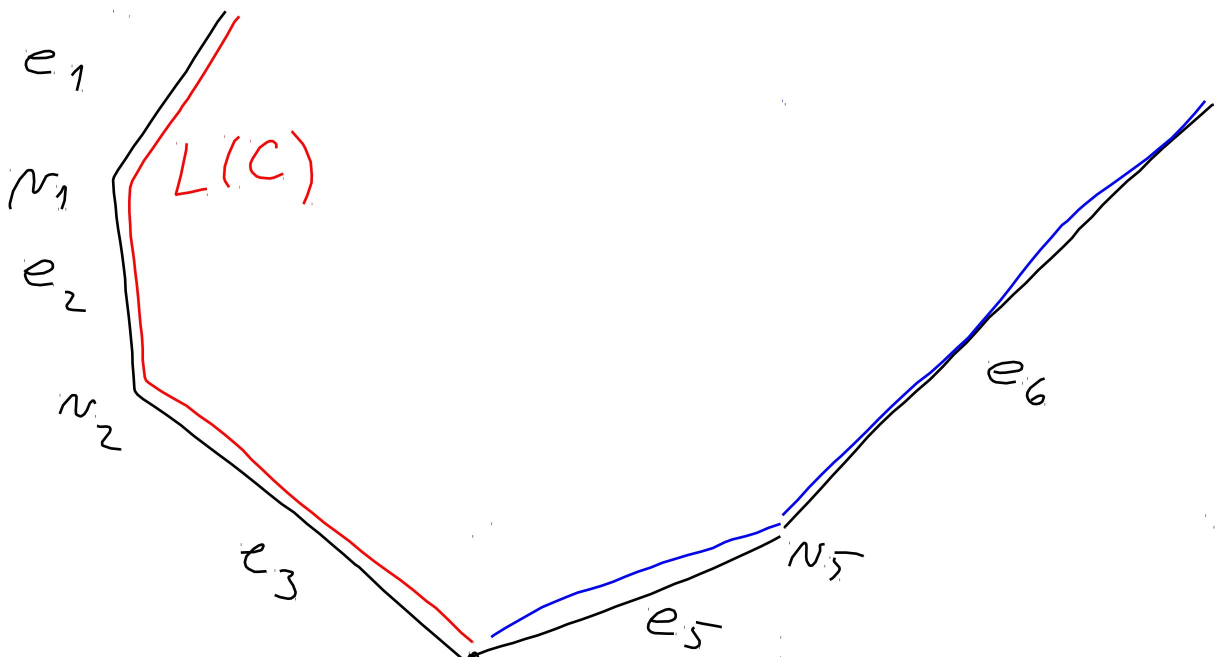
$C = \bigcap_{h_i \in H} h_i = C_1 \cap C_2$

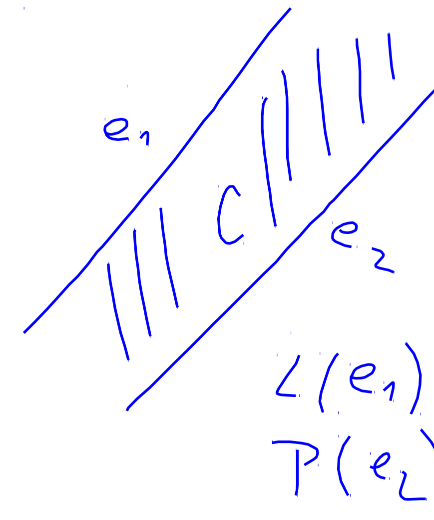
Potřebný čas $T(n)$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \underbrace{\text{čas potřebný pro spočtení } C_1 \cap C_2}_{O(n)}$$

$$\Rightarrow \quad T(n) = O(n \log n)$$

Popis průniku ploch pomocí levé a pravé hranice





$$L(C) = (e_1, n_1, e_2, n_2, e_3, n_4)$$

$$P(C) = (e_6, n_5, e_5, n_4)$$

Algoritmus pro $C_1 \cap C_2$

Vstup: $L(C_1), P(C_1), L(C_2), P(C_2)$

Výstup $L(C_1 \cap C_2), P(C_1 \cap C_2)$.

Metoda zametací přímky

Události jsou vrcholy C_1 a C_2 na začátku, uspořádané lexikograficky shora dolů a zleva doprava. Postupně přidáváme i průsečíky hran

Binární strom – není potřeba, neboť nám stačí pořadí hran $L(C_1), L(C_2), P(C_1), P(C_2)$ které protínají zametací přímku, a ty jsou nejvýše 4.

ÚLOHA LIN. PROGRAMOVÁNÍ V ROVINĚ

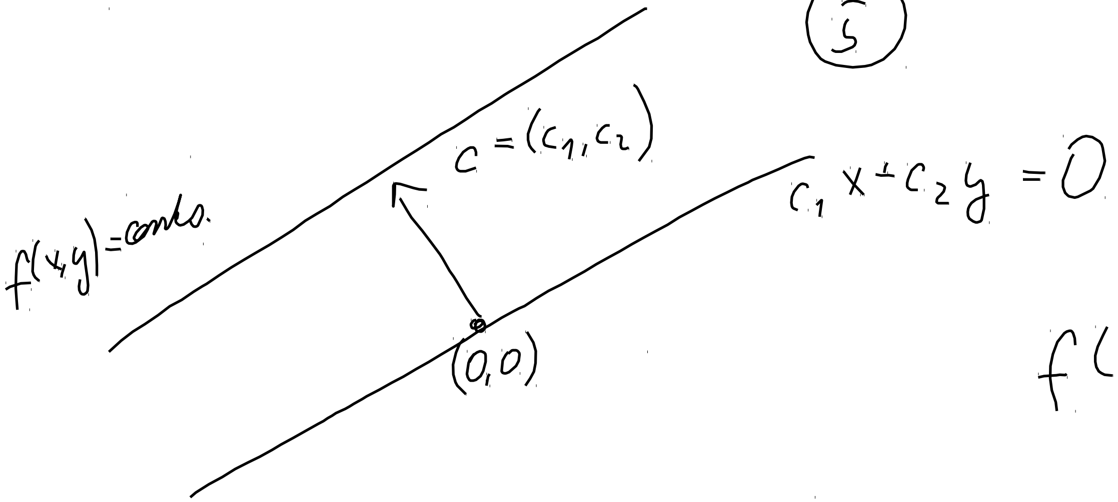
Máme lin. funkci dvou proměnných

$$f(x,y) = c_1 x + c_2 y \qquad c = (c_1, c_2) \neq 0$$

Množina bodů (x,y), že $f(x,y) = c_1 x + c_2 y = 0$ je přímka kolmá na vektor $c = (c_1, c_2)$

$$\langle (x,y), (c_1,c_2) \rangle = c_1 x + c_2 y = 0$$

skalární součin



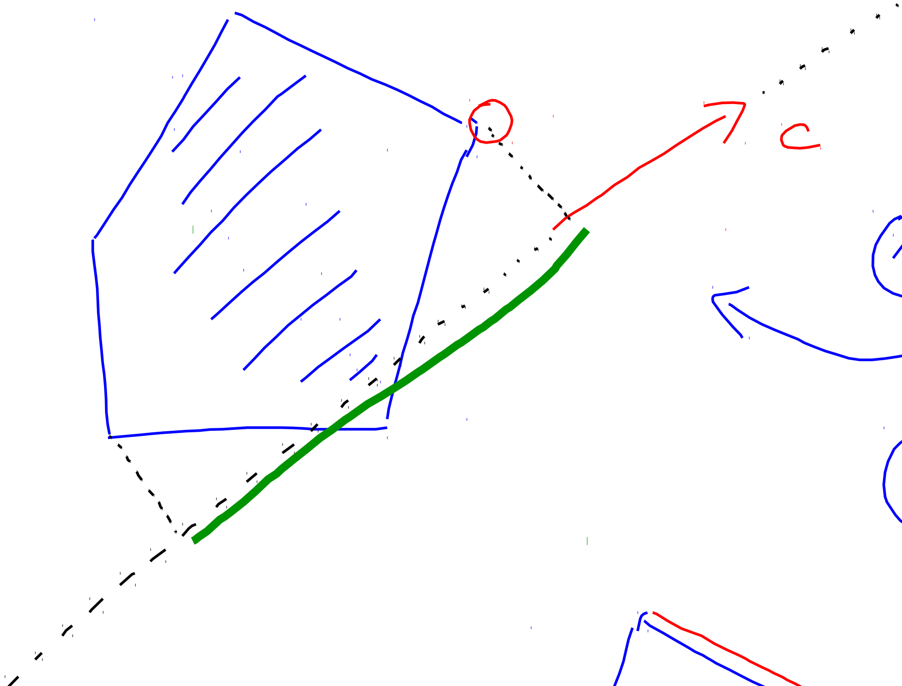
$$f(c_1,c_2) = c_1 \cdot c_1 + c_2 \cdot c_2 = c_1^2 + c_2^2 > 0$$

Úloha lin. programování v rovině je najít bod (x,y) takový, že $f(x,y) = c_1 x + c_2 y$ nabývá v něm svého maxima na množině

$$\begin{aligned}
a_{11}x + a_{12}y &\le b_1 \\
a_{21}x + a_{22}y &\le b_2 \\
a_{i1}x + a_{i2}y &\le b_i \\
&\cdots \\
a_{n1}x + a_{n2}y &\le b_n
\end{aligned}$$

6

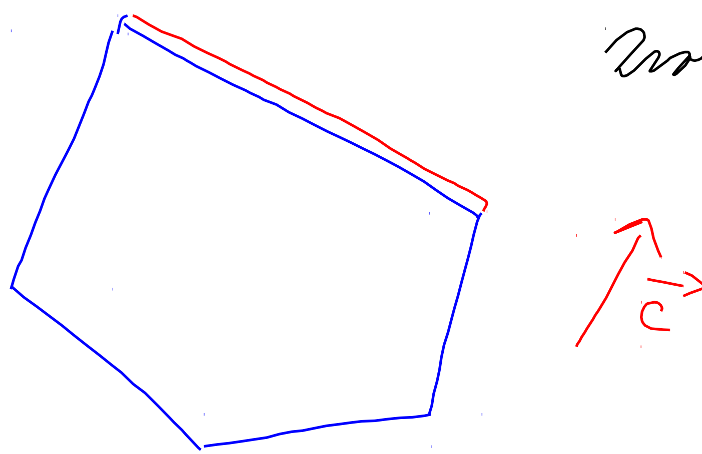
Geometricky hledáme bod v průniku polorovin, který je „nejdále" ve směru vektoru $\vec{c} = (c_1, c_2)$.



Možné typy řešení

① f nabývá na průniku polorovin svého maxima v jediném bodě

② f nabývá svého maxima v nekonečně mnoha bodech



Zvolíme vhodné lexikografické uspořádání, které nám poskytuje jeden bod maxima jako maximální.

3 Průnik polorovin je prázdný ... chceme 3 poloroviny

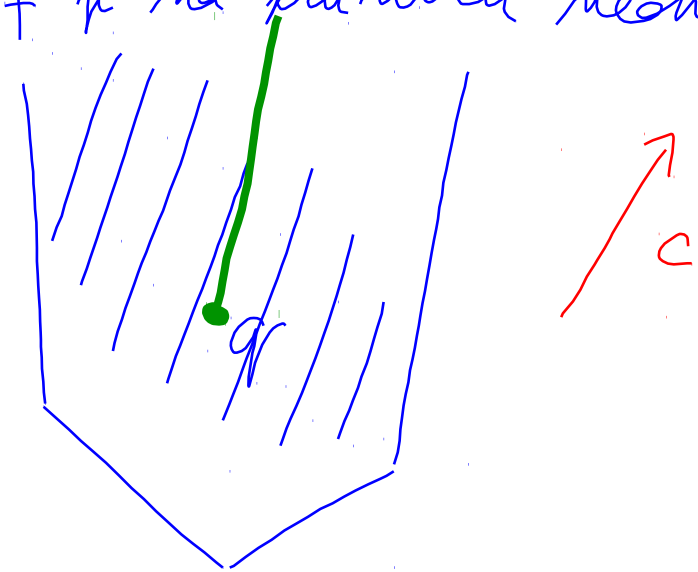
h_i, h_j, h_k

$h_i \cap h_j \cap h_k = \emptyset$

4 f je na průniku neomezená – výstupem bude polopřímka

$q + t\vec{d}$

v průniku, na které je f rostoucí.



8

Jednodimenzionální úloha lin. programování

$$f(x) = cx \qquad c \neq 0$$

Na množině x splňující podmínky

$$\left.\begin{aligned} a_1 x &\leq b_1 \\ a_2 x &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_n x &\leq b_n \end{aligned}\right\}$$

posuzována přímkovým podmínkám. $a_i \neq 0$

$I = \{ i \in \{1, \dots n\},\ a_i > 0 \}$ $\qquad i \in I \qquad x \leq \frac{b_i}{a_i} = d_i$

$J = \{ j \in \{1, \dots n\},\ a_j < 0 \}$ $\qquad j \in J \qquad x \geq \frac{b_j}{a_j} = e_j$

Průnik podmínek je

$$e = \max \{ e_j,\ -\infty,\ j \in J \}$$

$$d = \min \{ d_i,\ +\infty,\ i \in I \}$$

Jestliže $e \leq d$, je průnik $[e, d] \neq \emptyset$

$e > d$, je průnik prázdný

nechť $c > 0$

(1) $e \leq d < \infty$ — bod maxima je d

(2) $d = \infty$ — f je v průniku neomezená

(3) $e > d$ — průnik je prázdný a dostaneme dvě neznámé takové, že

$$d_i < e_j$$

Dostaneme 2 podmínky s prázdným průnikem.

Časová náročnost úlohy z části 1 je $O(n)$.

nechť $c < 0$

(1) $-\infty < e \leq d$ — bod maxima je e

(2) $e = -\infty$ — f je na průniku neomezená

(3) stejné jako u předchozího

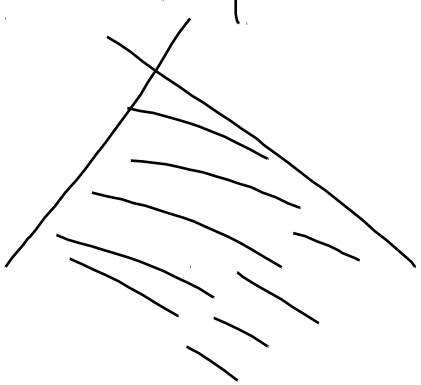
Zpět do roviny

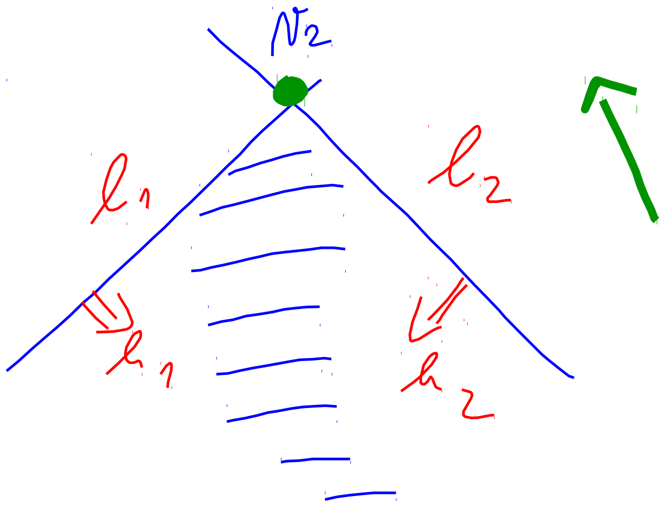
Nejdříve úlohu vyřešíme za omezujícího předpokladu, že existují mezi polorovinami $h_1, h_2, \dots h_n$ dvě takové, že f na jejich průniku je omezená.

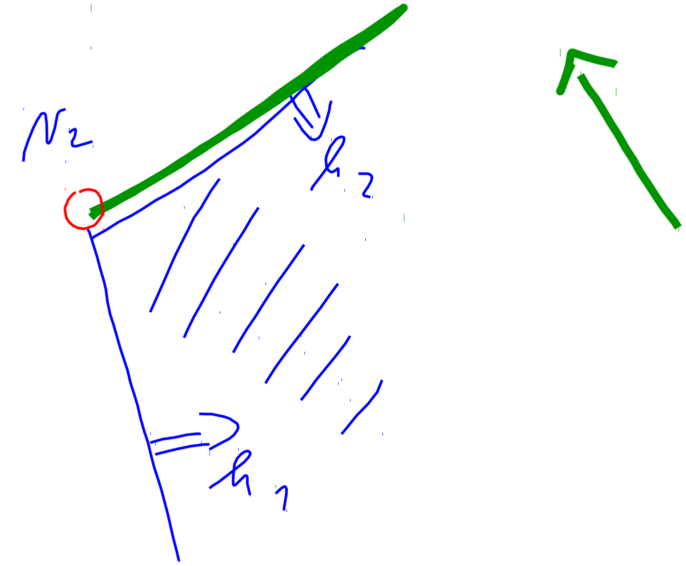
Omezená úloha lin. programování.

Mějme množinu n polorovin $H = \{h_1, h_2, \dots h_n\}$ a předpokládejme, že f je omezená na $h_1 \cap h_2$.

Nabývá-li f svého maxima na $h_1 \cap h_2$, pak jedním z bodů v němž maxima dosahuje je průnik hraničních přímek.







Algoritmus hledání bodů maxima funkce f bude přírůstkový. Tj. za předpokladu, že f nabývá svého maxima v bodě v_i na $C_i = \bigcap_{j=1}^{i} h_j$ pro $i \geq 2$, kde v_i je maximální z bodů maxima v lexikografickém uspořádání. Přidáme další polorovinu h_{i+1} a hledáme bod maxima v_{i+1} na C_{i+1}.

Zde vezmeme lexikografické uspořádání, v němž je vrchol v_2 maximální.

<u>Lemma</u>: Nechť v_{i-1} je bod maxima f na C_{i-1} maximální v daném lexikografickém uspořádání. Pak

(1) Je-li $v_{i-1} \in h_i$, je $v_i = v_{i-1}$.

(2) Jestliže $v_{i-1} \notin h_i$, pak v_i leží na hraniční přímce l_i poloroviny h_i a lze jej najít pomocí úlohy 1-dim programování. Případně, lze zjistit, že $C_i = \emptyset$ a najít h_j, h_k tak, že

$$h_j \cap h_k \cap h_i = \emptyset.$$

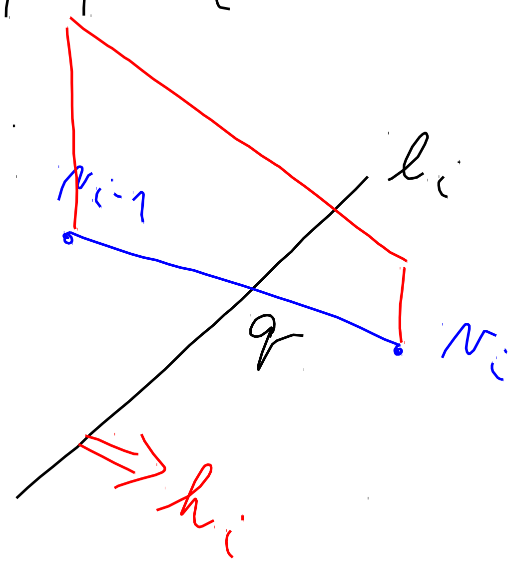
Důkaz: $C_i \subseteq C_{i-1}$

$$\max_{(x,y)\in C_i} f(x,y) \le \max_{(x,y)\in C_{i-1}} f(x,y)$$

(1) Jestliže $v_{i-1} \in h_i$, pak $v_{i-1} \in C_i$ a nutně f ve v_{i-1} nabývá svého maxima na C_i.
Řešení v_{i-1} musí být maximální v lexikografickém uspořádání na C_i, když byla maximální na větší C_{i-1}.

(2) Nechť $v_{i-1} \notin h_i$. Pak ukážeme, že v_i nemůže ležet uvnitř h_i.

$$q = \ell_i \cap [v_{i-1}, v_i]$$



$f(v_{i-1}) \ge f(v_i)$

$q \in C_i$

$f(v_{i-1}) \ge f(q) \ge f(v_i)$

(a) Ostrá nerovnost

$$f(v_{i-1}) > f(v_i)$$

$$\Downarrow$$

$$f(v_{i-1}) > f(q) > f(v_i) \qquad q \in C_i$$

To je ale spor s tím, že v_i je bodem maxima f na C_i.

(b) Rovnost

$$f(v_{i-1}) = f(v_i)$$

$$f(v_{i-1}) = f(q) = f(v_i)$$

V lexikografickém uspořádání musí být v_{i-1} největší, tedy

$$v_{i-1} > q > v_i$$

Ale to je spor s tím, že v_i je bod maxima f na C_i maximální v daném lexikografickém uspořádání.

Závěr: v_i musí ležet na C_i !