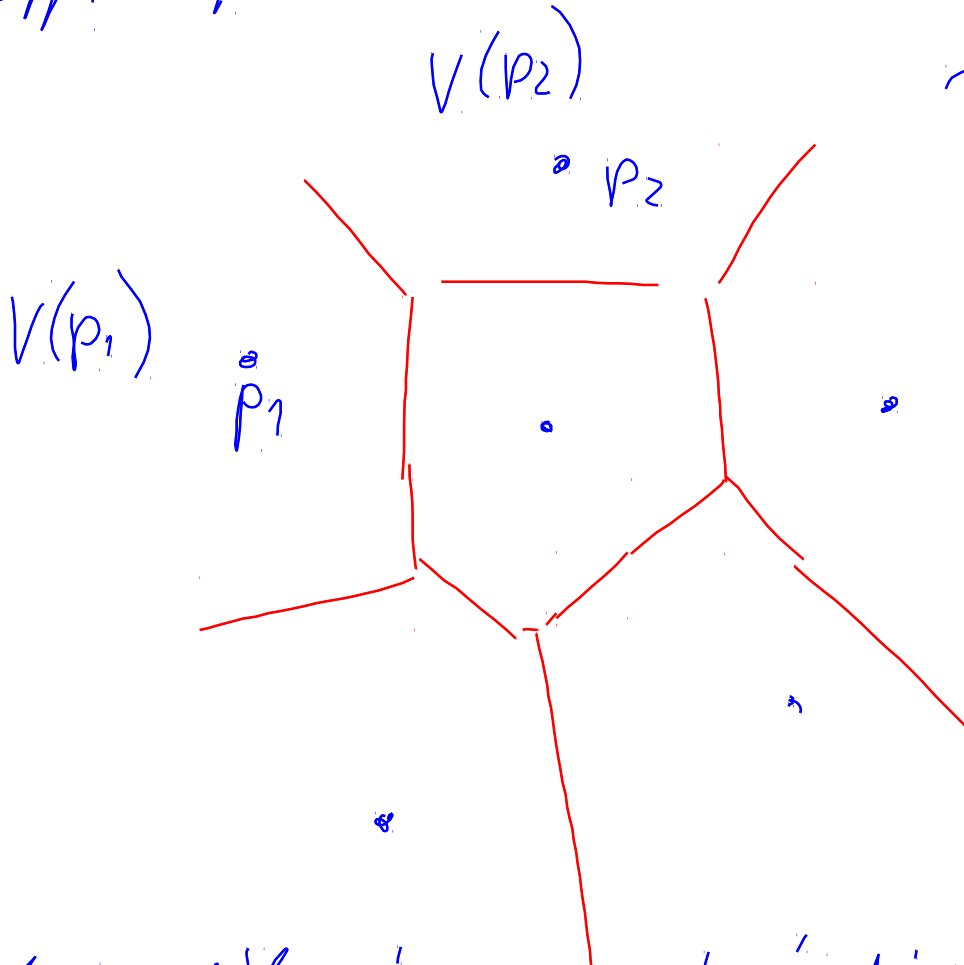
DIAGRAMY VORONOIA

Post office problem



Zadaná množina n bodů

$P = \{p_1, \dots, p_n\}$

Najít rozdělení roviny na oblasti $V(p_i)$

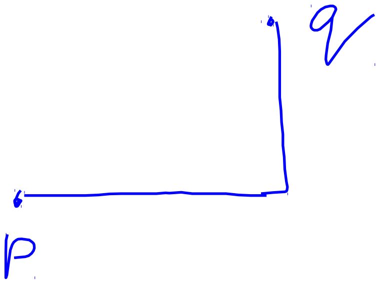
$V(p_i) = \{ q \in \mathbb{R},\ d(q,p_i) \leq d(q,p_j)$ pro $j \neq i \}$

Toto rozdělení se nazývá diagram Voronoia

V-diagram

$$d(p,q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}$$

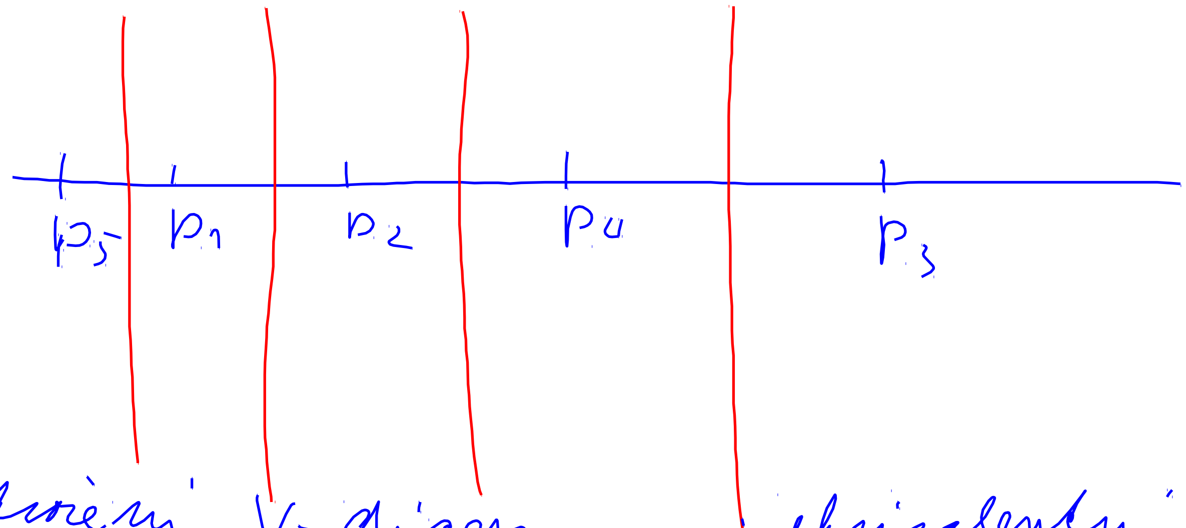
jiné metriky $\quad d_1(p,q) = |p_x - q_x| + |p_y - q_y|$



$h(p_i,p_j)$ je polorovina, jejíž hraniční přímka je osa úsečky $p_i p_j$ a v níž leží p_i, pak

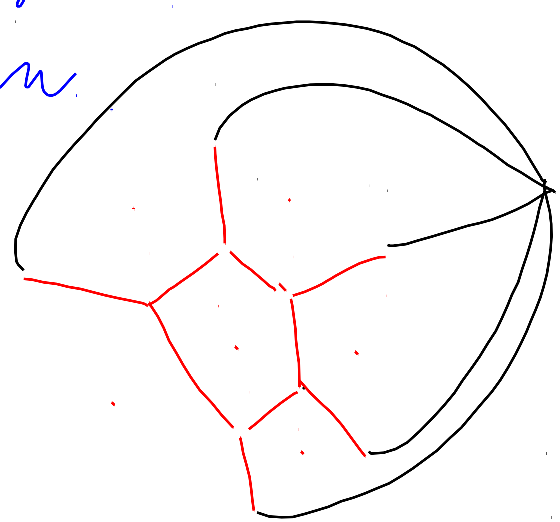
$$V(p_i) = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} h(p_i,p_j) \quad \text{průnik } n-1 \text{ polorovin}$$

1. Nelze ovšem čekat algoritmus s časovou náročností lepší než $O(n \log n)$.



Vytvoření V-diagramu je ekvivalentní se seřazením bodů podle x-ové souřadnice, a to má $O(n \log n)$.

2. <u>Věta</u> Diagram Voronoia má nejvýše $2n-5$ vrcholů a $3n-6$ hran



Pro tento rovinný graf platí Eulerova věta

m vrcholy

$$(m+1) - h + n = 2$$

$$h = m + n - 1$$

4

$$2h \geq 3(m+1)$$

$$2(m+n-1) \geq 3m+3$$

$$2n-5 \geq m$$

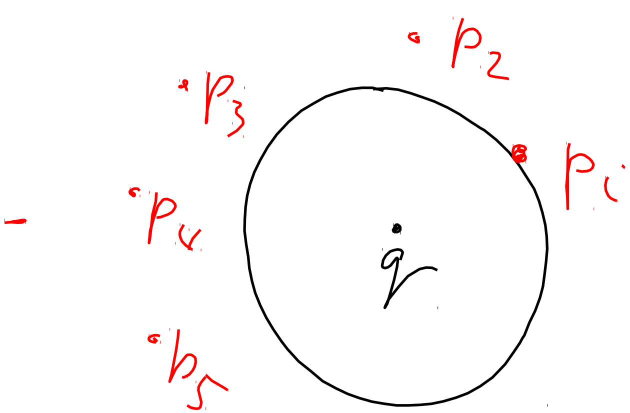
z Eul. nerovnosti

$$h = m+n-1 \leq 2n-5+n-1 = 3n-6.$$

Označení $P = \{p_1 \dots p_n\}$

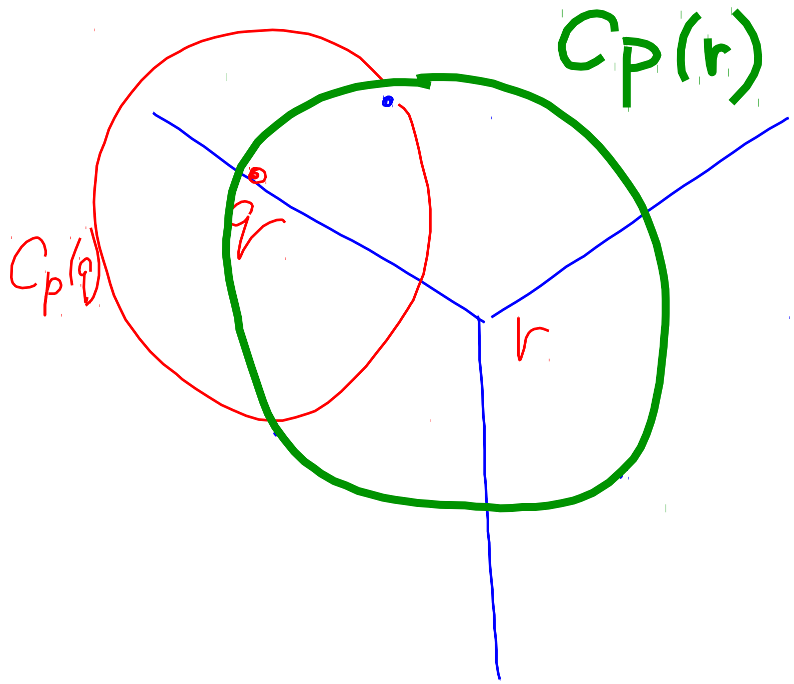
q bod v rovině

$C_P(q)$ je kruh se středem q a poloměrem $d(q,P)$



Lemma Bod q leží na hraně V-diagramu, právě když na hranici $C_P(q)$ leží 2 body z P.

Bod q je vrcholem V-diagramu, právě když na hranici $C_P(q)$ leží aspoň 3 body

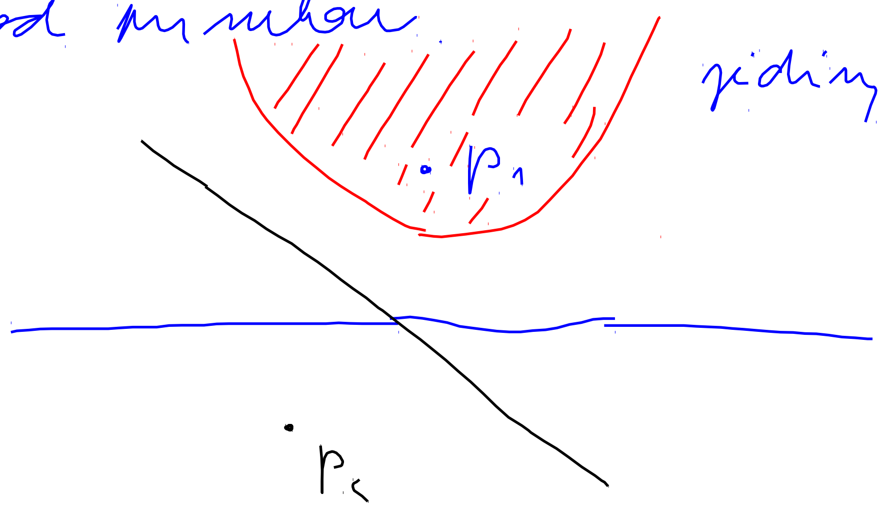


6

Algoritmus pro konstrukci V-diagramu

- pomocí zametací přímky

Při pohybu zametací přímky se V-diagram vytváří ne v celé polorovině nad zametací přímkou, ale pouze v její části, kam nesahá vliv bodů množiny P pod přímkou.



jediný bod z P nad ℓ

ℓ zametací přímka

$\alpha = \{ r \in \mathbb{R},\ d(r,p) = d(r,\ell) \}$ je parabola

Nechť nad zametací přímkou ℓ máme body $p_1, p_2, \ldots, p_k$.
Potom na V-diagram ve sjednocení

$$\bigcup_{i=1}^{k} \alpha^+(p_i)$$

kde $\alpha^+(p_i) = \{ r \in \mathbb{R}^2, \ d(r, p_i) \leq d(\ell, r) \}$

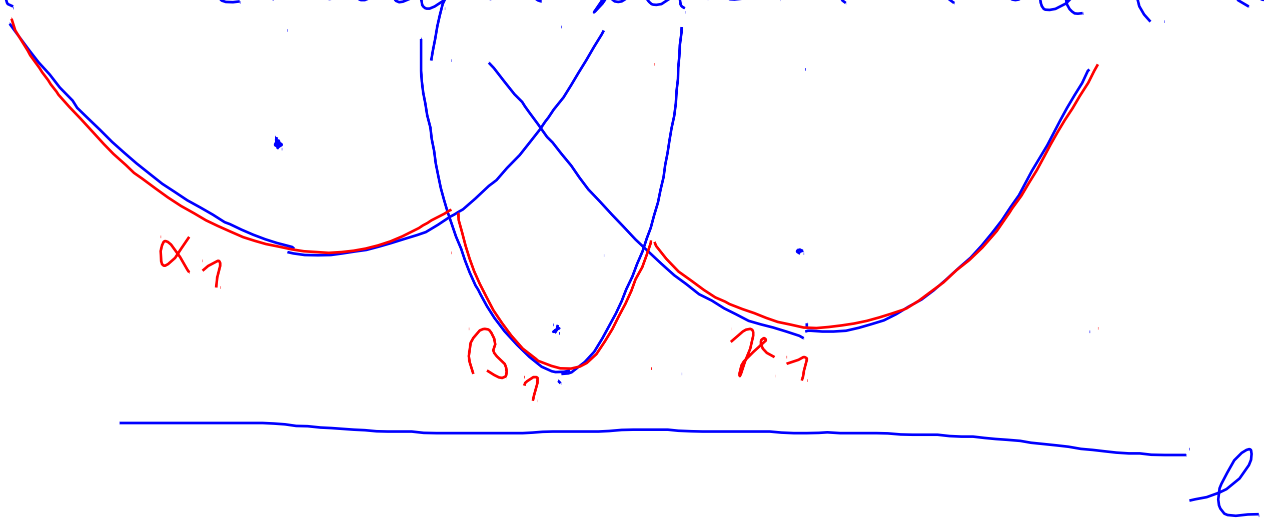
na V-diagram nemají žádný vliv body z P ležící pod přímkou ℓ. Je-li p_j pod přímkou ℓ, pak jeho vzdálenost k bodu $r \in \alpha^+(p_i)$ je

$$d(r, p_j) \geq d(r, \ell) \geq d(r, p_i)$$

Pro danou polohu zametací přímky má úplný V diagram v oblasti

$$\bigcup_{p_i \text{ nad } l} \alpha^+(p_i)$$

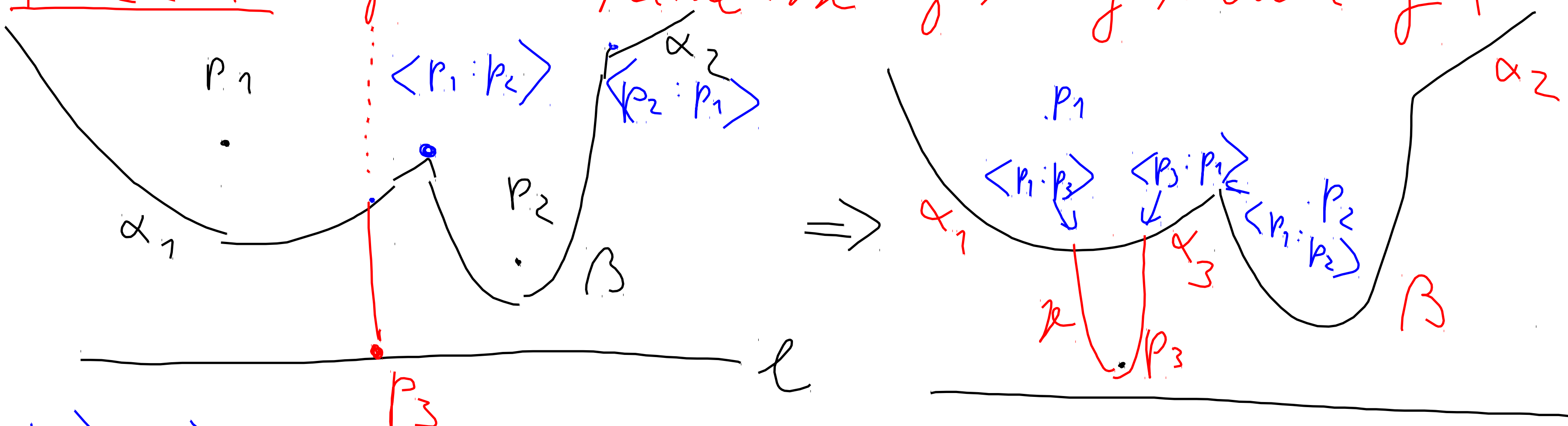
Tato oblast je ohraničena oblouky parabol, jejichž hraniční křivka se nazývá plážová linie (beach line).



Události jsou dvojí typu

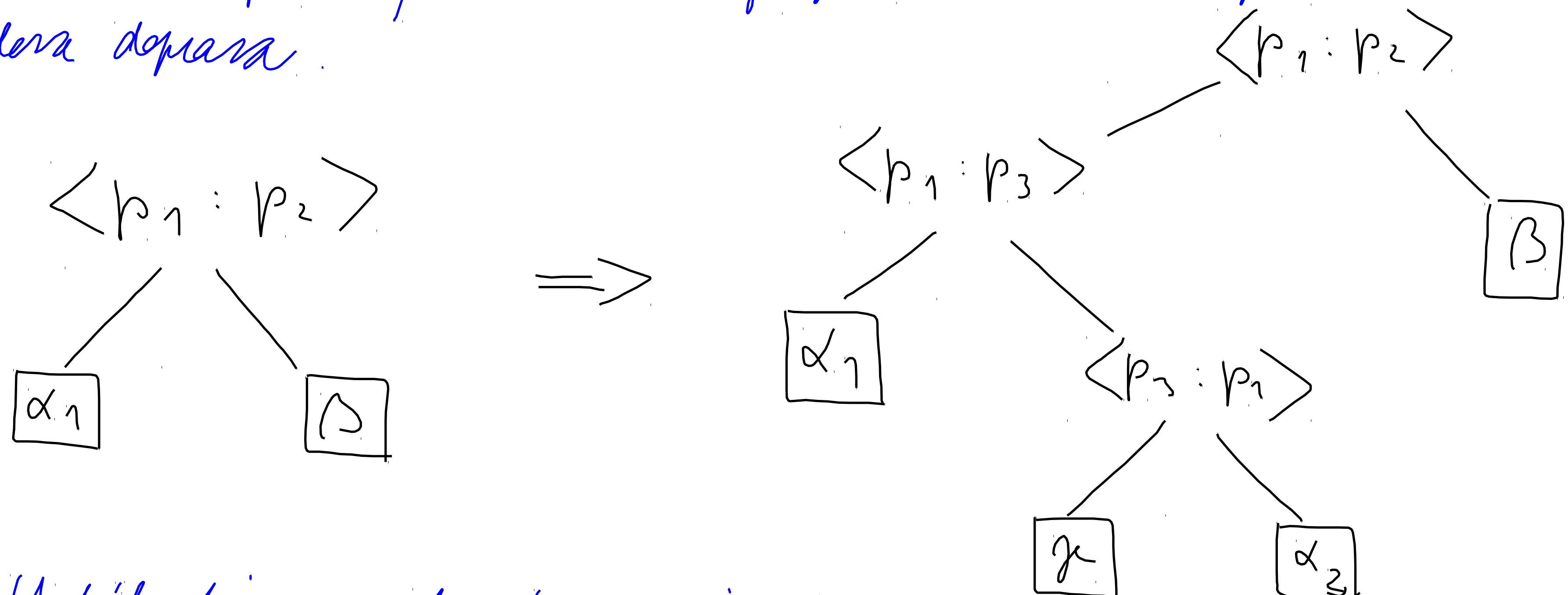
1. body, ve kterých začíná nový oblouk v plážové linii – místní události (site events)

Tvrzení Jsou to právě všechny body množiny P



$\langle p_1 : p_2 \rangle$ leží na hraně V-diagramu

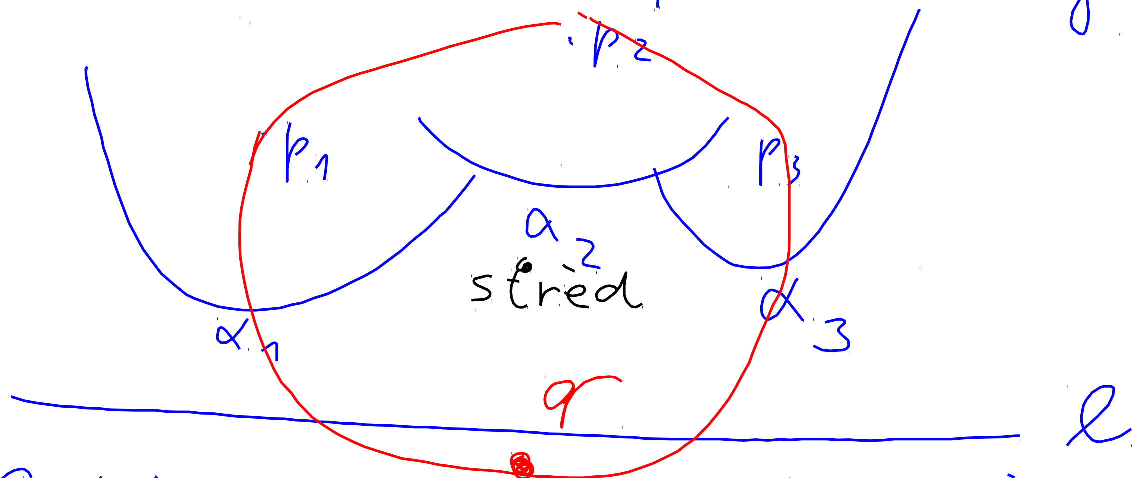
Binární vyvážený strom mění pořadí oblouků plážové linie zleva doprava.



2) Události, ve kterých nějaký oblouk z plážové linie mizí, kruhové události (circle events)

TVRZENÍ: Kruhovými událostmi jsou body, které získáme takto:

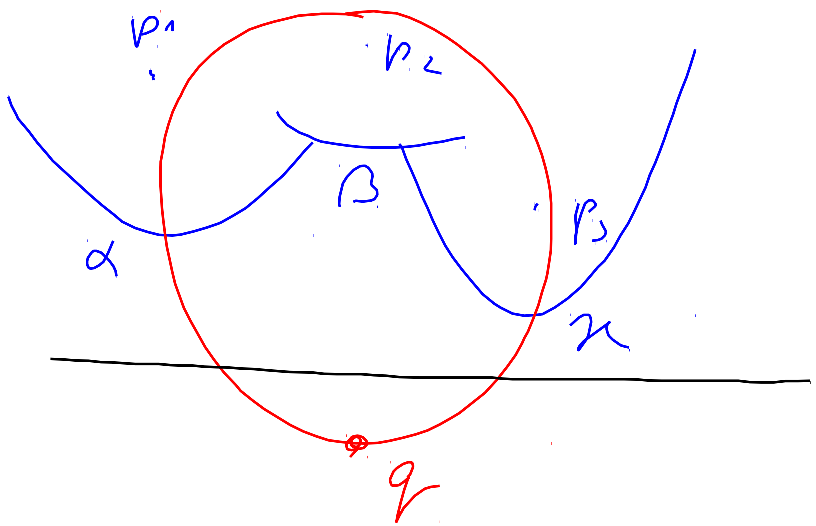
Mějme 3 po sobě jdoucí oblouky parabol

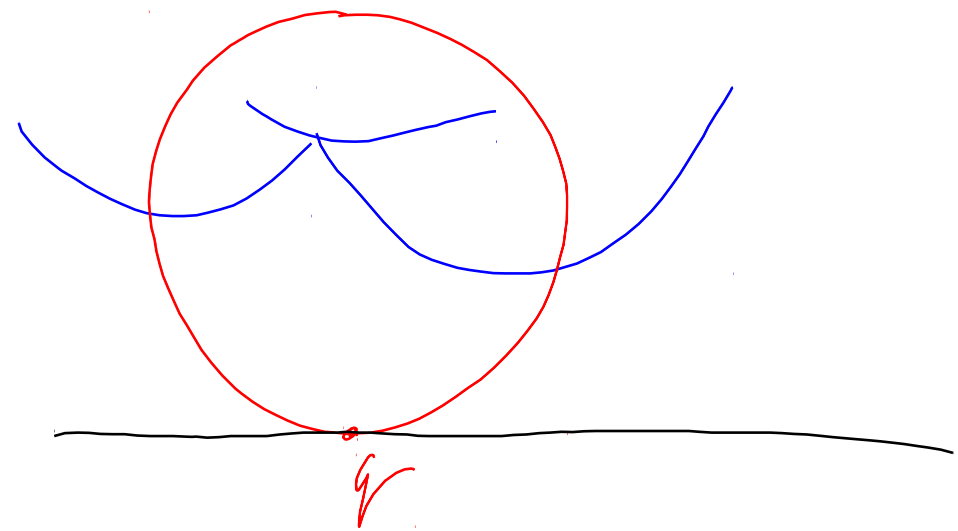


Sestrojíme kružnici, na níž leží ohniska těchto parabol tj. body p_1, p_2, p_3. Kruhovou událostí je nejnižší bod q této kružnice. Kruhovou událostí není středem kružnice, tento bod je však důležitý, neboť je uzlem V-diagramu, má stejnou vzdálenost od p_1, p_2 i p_3.

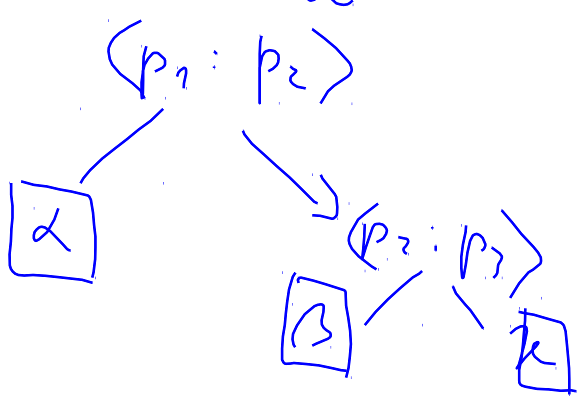
TVRZENÍ

Při průchodu zametací přímky kruhovou událostí pro oblouky $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ mizí z plážové linie oblouk α_2.

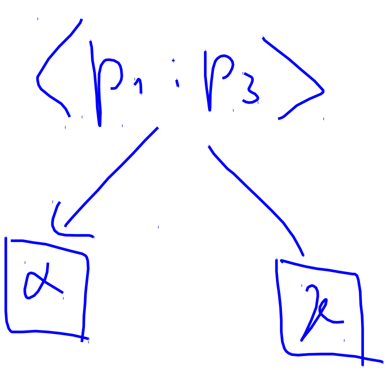




Změna stromu



$$\Longrightarrow$$



Při každé změně plánované linie je potřeba provést přepočet kruhových událostí.
Počítáme kruhové události pro nové trojice po sobě jdoucích oblouků. Kruhová událost indikuje, kde by mohl zaniknout prostřední oblouk.
K realizaci kruhové události však nemusí kvůli změně v plánované linii dojít.

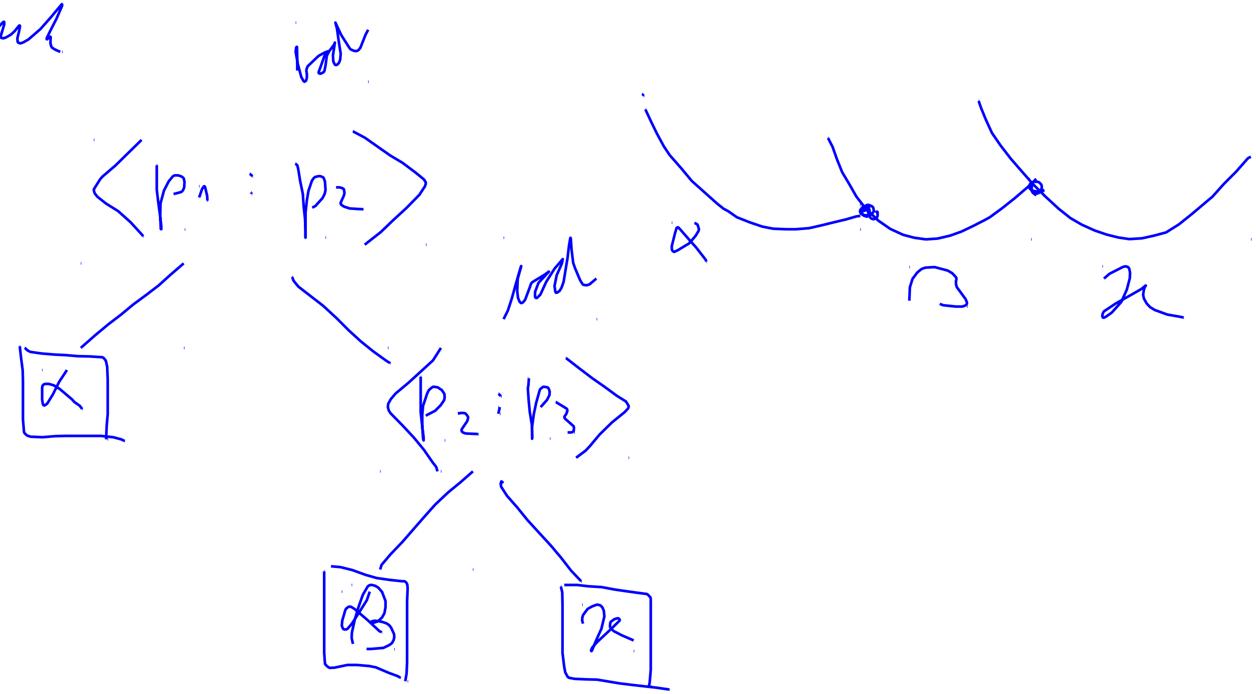
14

Pseudokód v LS

Rámcový algoritmus volá algoritmy

Handle site event

Handle circle event



Věta: Časová náročnost tohoto algoritmu je
$O(n \log n)$.

Důkaz: Setřídění bodů $p_1, \dots, p_n$ dle pořadí trvá čas $O(n \log n)$. Oblouků na plážové linii může být maximálně $2n-1$.
U prvního bodu přibyde 1 oblouk, u dalších 2 oblouky.
Čas potřebný na Handle site event, Handle circle event je $O(\log n)$. Tyto algoritmy provádíme na každý oblouk nejvýše jednou.

Celkově $O((2n-1) \log n) + O(n \log n) = O(n \log n)$