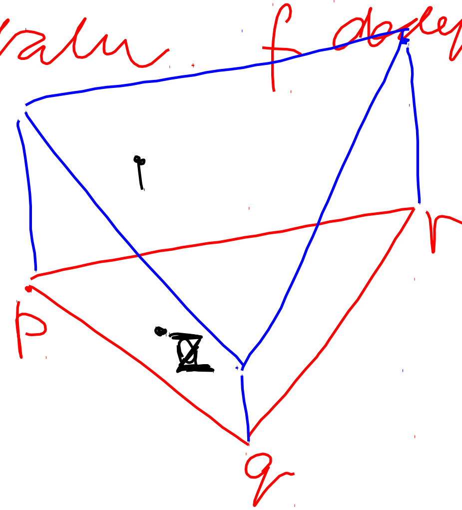
DELAUNAYOVA TRIANGULACE

V rovině máme n bodů a chceme rozdělit konvexní obal této množiny na trojúhelníky s vrcholy v zadaných bodech. Nepřesně - Delaunayova triangulace je triangulace, kde je „co nejméně malých úhlů".

Využití $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a známe hodnoty f v n bodech. Chceme f doplnit ve všech bodech konvexního obalu. f dodefinujeme po částech lineárně

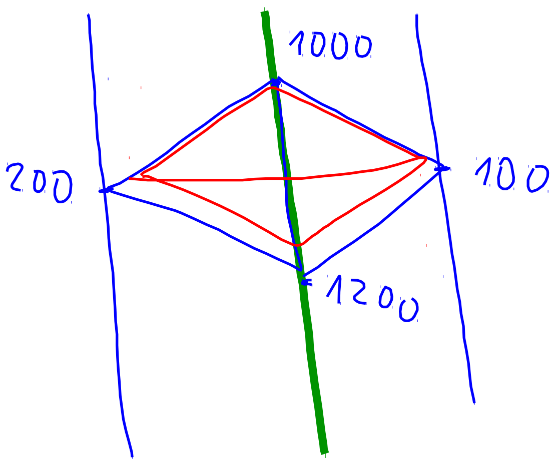


2

z leží v $\Delta\, pqr$

$$z = a\,p + b\,q + (1-a-b)\,r \qquad 0 \le a \le 1,\quad 0 \le b \le 1$$

$$f(z) = a\,f(p) + b\,f(q) + (1-a-b)\,f(r) \qquad 1-a-b \ge 0$$



(3)

Upřesnění pojmu D. triangulace

<u>Věta</u> Vnitřky triangulace konv. obalu n bodů, který je k-úhelník, mají $2n-2-k$ trojúhelníků a $3n-3-k$ hran.

<u>Dk</u>: m počet trojúhelníků

Rozdělení na △ je rovinný graf

Eulerova věta

$$n - h + m + 1 = 2$$

$$2h = 3m + k$$

2 rovnice

$$h = \frac{3m+k}{2}$$

dosadíme do Eul. věty

$$n - \frac{3m+k}{2} + m + 1 = 2$$

$$2n - k - 2 = m \quad \text{počet } \triangle$$

$$h = \frac{3m+k}{2} = \frac{3(2n-k-2)+k}{2} = 3n-k-3$$

počet hran

(4)

To nám dává možnost porovnat triangulace.

T je triangulace s $3n$ úhly

$$\alpha_1(T) \le \alpha_2(T) \le \alpha_3(T) \le \dots\dots\dots$$

Nyní budeme triangulace porovnat lexikograficky

$$T < T'$$

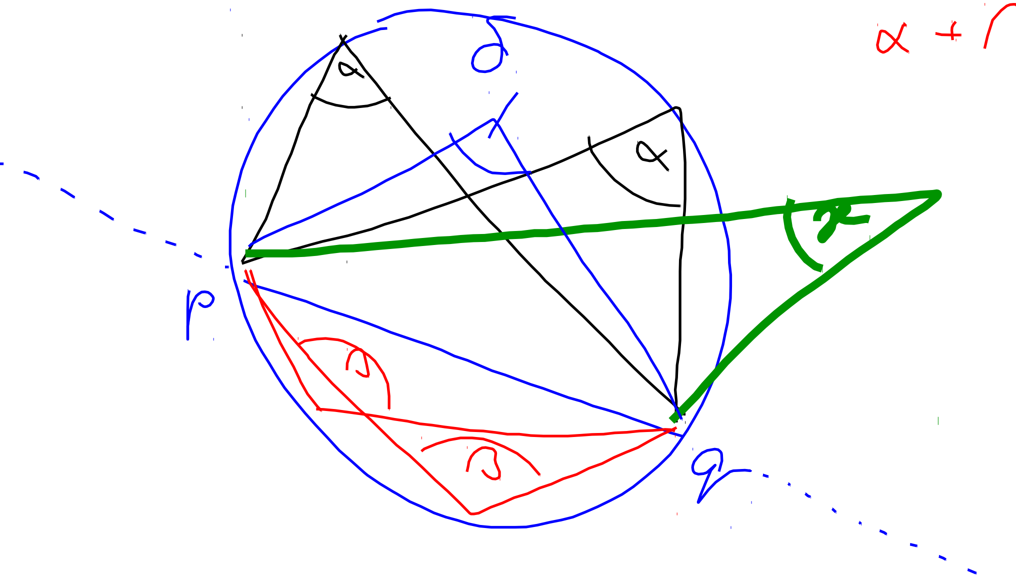
právě když

$$\alpha_1(T) = \alpha_1(T'), \dots, \alpha_{i-1}(T) = \alpha_{i-1}(T') \text{ a } \alpha_i(T) < \alpha_i(T')$$

(1) Hledáme optimální triangulaci – je triangulace maximální v tomto uspořádání

④

Geometrie ve střední úhly – obvodové úhly



$\alpha + \beta = 180^\circ$

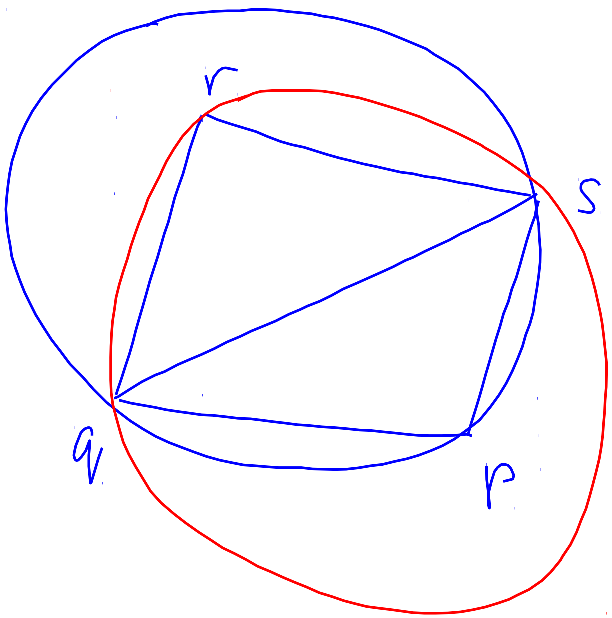
$\gamma < \alpha$

$\delta > \alpha$

Čtyři body p q r s leží v tomto pořadí na kružnici, jestliže součet protilehlých úhlů ve čtyřúhelníku je 180°.

Jestliže ve čtyřúhelníku součet úhlů u p a r je > 180°, pak r leží v kružnici opsané △ pqs a p leží vně kružnice opsané △ qsr.

5

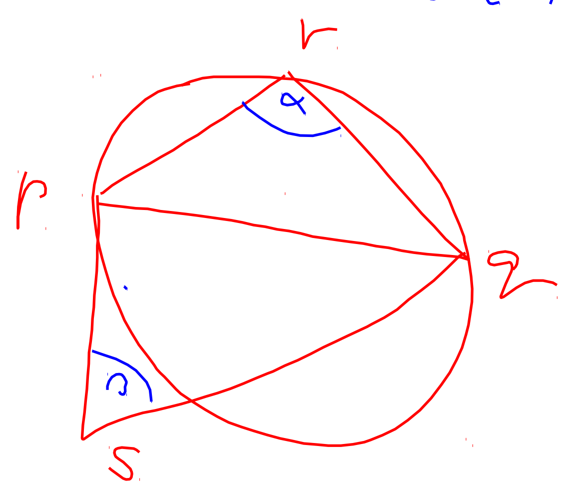


Legální hrana v triangulaci a legální triangulace

Nechť pq je hrana triangulace. Jestliže je hranou pouze jednoho trojúhelníka, je legální.

Jestliže je hranou trojúhelníků Δpqr a Δpqs, pak je legální, jestliže bod s neleží uvnitř kružnice opsané Δpqr.

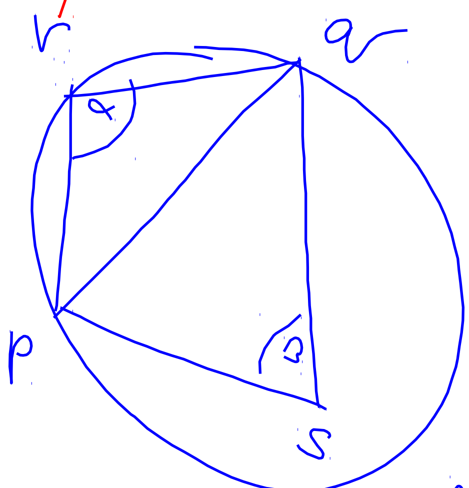
Ostatní hrany nazýváme ilegální.



$\alpha + \beta \leq 180°$

2) Legální triangulace je triangulace, která má pouze legální hrany.

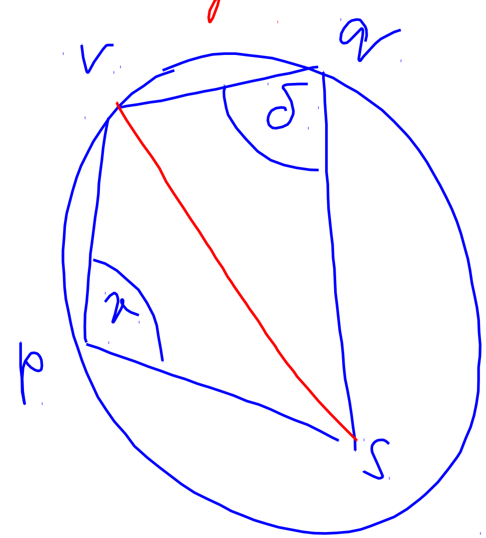
Výměna nelegální hrany za legální – flip.



pq je ilegální

$\alpha + \beta > 180$

$\Longrightarrow$



$\gamma + \delta < 180°$

rs je legální

Při flipu přejdeme od triangulace T k triangulaci T'. Platí $T < T'$.

Naivní algoritmus pro vytvoření legální triangulace

Vytvoříme nějakou triangulaci a flipem odstraňujeme ilegální hrany tak dlouho, dokud tam nějaká je.

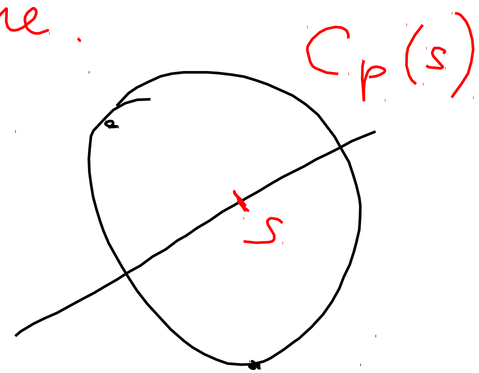
Úhlově optimální triangulace je legální.

Delaunayova triangulace

Máme množinu P n bodů v rovině.

Delaunayův graf je graf, kde dva vrcholy jsou spojeny úsečkou právě když leží na nějaké kružnici a všechny ostatní body leží vně kružnice.

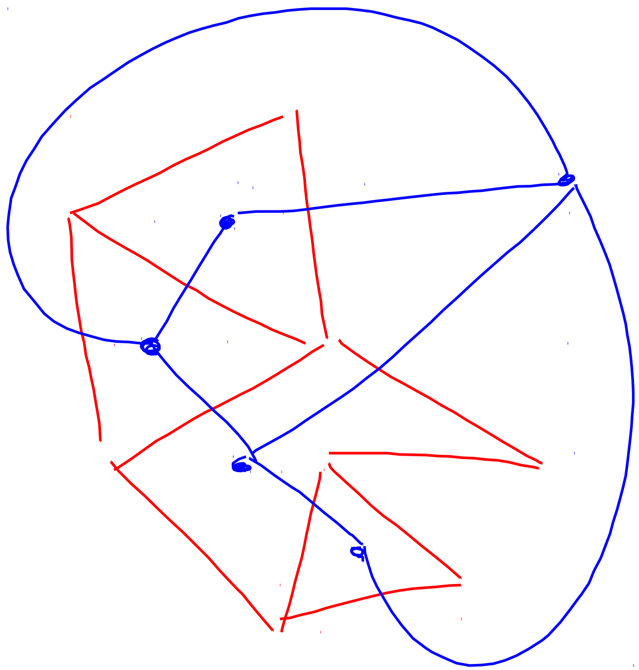
Diagram Voronoia pro množinu P:
bod leží na hraně diagramu, jestliže existuje kružnice se středem v tomto bodě na níž leží dva body množiny P a ostatní leží vně.



pq je hrana D. grafu

$\Leftrightarrow$ p a q mají sousední oblasti v diagramu V.

Závěr D. graf je duální graf k diagramu V.



Modrý graf je duální k červenému hraničnímu grafu.

D. graf není obecná triangulace.

Delaunayova triangulace je triangulace vzniklá z Delaunayova grafu.

Legální triangulace

pq je hrana leg. triangulace, když ve kružnici opsané přilehlému Δpqr neleží vrchol druhého přilehlého trojúhelníka.

D. triangulace

pq je hrana D. triangulace, když v kružnici opsané přilehlému Δpqr neleží žádný další bod množiny P.

$\Rightarrow$ Každá D. triangulace je legální.

Platí i obrácené tvrzení. Každá legální triangulace je Delaunayova – e. learning.