10. Neparametrické testy

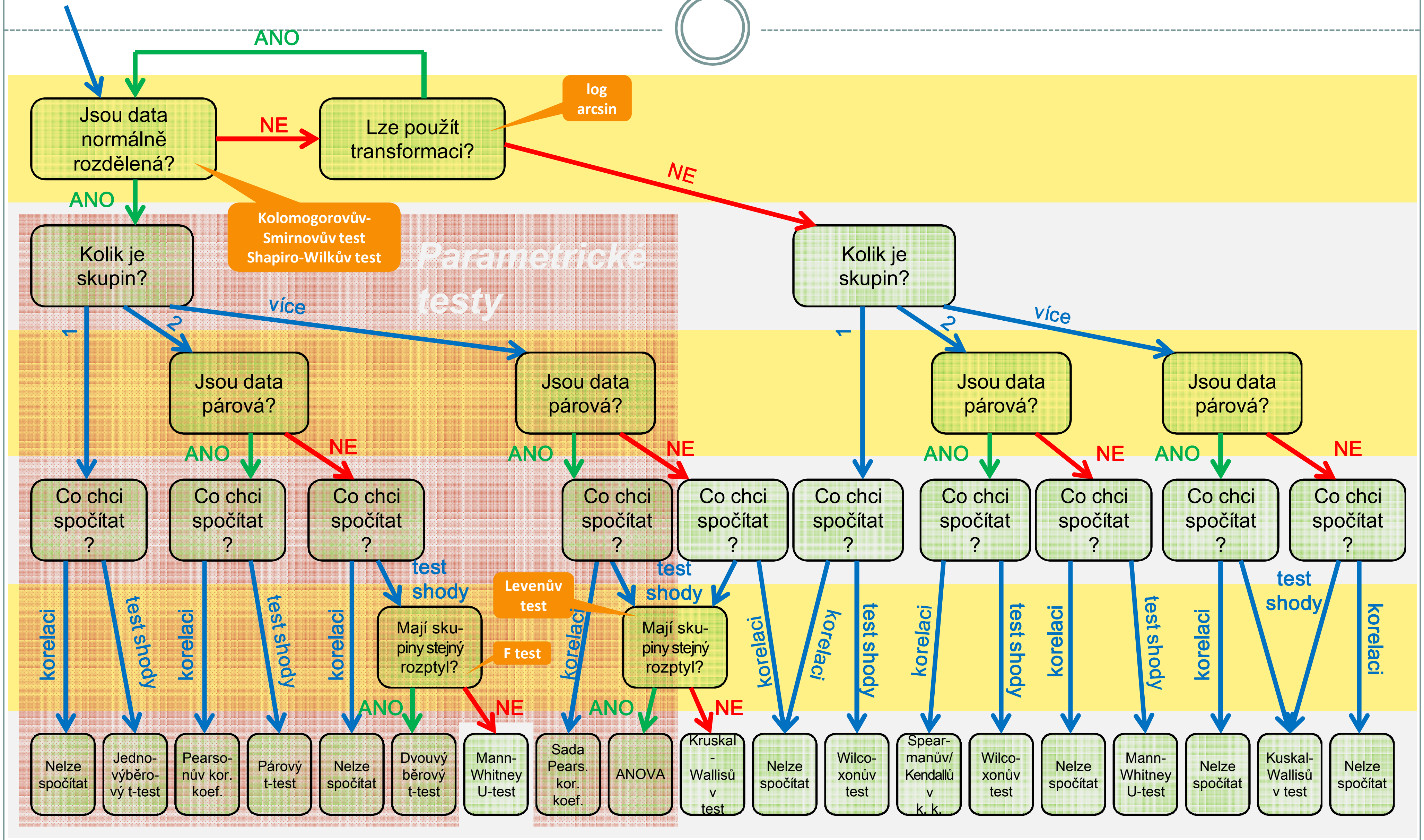
Mann-Whitney U-test
Wilcoxonův test
Znaménkový test

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Jarkovský, L. Dušek

Shrnutí statistických testů

Typ srovnání	Nulová hypotéza	Parametrický test	Neparametrický test
1 skupina dat vs. etalon	Střední hodnota je rovna hodnotě etalonu.	jednovýběrový t-test	Wilcoxonův test; znaménkový test
2 skupiny dat nepárově	Obě skupiny hodnot pochází ze stejného rozdělení.	nepárový t-test	Mann-Whitneyův test
2 skupiny dat párově	Zkoumaný efekt mezi páry hodnot je nulový.	Párový t-test	Wilcoxonův test; znaménkový test
shoda rozdělení	rozdělení dat ve skupině odpovídá teoretickému (vybranému) rozdělení.	Shapiro-Wilkův test; Kolmogorovův-Smirnovův test; Lilieforsův test	χ2 test, test dobré shody
homoskedasticita (shoda rozptylů)	rozptyl obou (všech) skupin je shodný.	Levenův test	
více skupin nepárově	Zkoumaný efekt mezi skupinami hodnot je nulový.	ANOVA	Kruskal- Wallisův test
korelace	Neexistuje (příčinná, důsledková) vazba mezi skupinami hodnot.	Pearsonův koeficient	Spearmanův koeficient; Kendallův koeficient

Shrnutí statistických testů



Mann-Whitneyův U test

<u>Neparametrická</u> varianta t-testu se skoro stejnou silou v případě normálně rozdělených dat. Vždy pro dvě skupiny naměřených hodnot.

Předpoklad: **Pravděpodobnost že X > Y = pravděpodobnosti, že Y > X.**

↓

Vypočtená U statistika má přibližně normální rozdělení (pro malé počty jsou hodnoty tabelovány zvlášť).

Postup: Hodnoty z obou sad měření se seřadí podle velikosti.
Počítá se U statistika pro první nebo druhou sadu (obvykle pro tu s nižšími hodnotami)
U_1 je součet počtů hodnot ze sady 2 nižších než jednotlivé prvky sady 1 (postupně se sčítá pro všechny prvky ze sady 1).

Alternativní výpočet:

$$U_1 = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

R_1 je součet pořadí skupiny 1.

Mann-Whitneyův U test

Provede se normalizace:

$$z = \frac{U - m_U}{\sigma_U} \qquad m_U = \frac{n_1 n_2}{2} \qquad \sigma_U = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

z je normalizovaná statistika
m_U je průměr statistiky U
σ_U je směrodatná odchylka statistiky U

Vypočtená statistika z se porovná s tabelovanými hodnotami normálního rozdělení resp. pro nižší počty s tabelovanými hodnotami pro Mann-Whitneův U test.

Neparametrická obdoba párového t-testu

Wilcoxon test

- Jsou vytvořeny diference mezi soubory, nulové jsou vyloučeny, dále je vytvořeno jejich pořadí bez ohledu na znaménko a poté je sečteno pořadí kladných a pořadí záporných rozdílů. Menší z těchto dvou hodnot je srovnána s kritickou hodnotou testu a pokud je menší než kritická hodnota testu, pak zamítáme hypotézu shody obou souborů hodnot. Pro test existuje aproximace na normální rozložení, ale pouze pro velká n>25.

$$t = \frac{Menší\_suma\_diferencí - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$$

Před zásahem	Po zásahu	Změna	Absolutní pořadí
6	2	4	10
2,5	3	-0,5	1,5
6,3	5	1,3	6
8,1	9	-0,9	5
1,5	2	-0,5	1,5
3,4	4	-0,6	3
2,5	1	1,5	8
1,11	2	0,89	4
2,6	4	-1,4	7
1	3	-2	9

Wilcoxonův test – příklad I

člověk	A	B	diference	pořadí
1	142	138	4	4,5
2	140	136	4	4,5
3	144	147	-3	3
4	144	139	5	7
5	142	143	-1	1
6	146	141	5	7
7	149	143	6	9,5
8	150	145	5	7
9	142	136	6	9,5
10	148	146	2	2

A…….parametr krve před podáním léku

B…….parametr krve po podání léku

W_+ …… Σ pořadí kladných rozdílů = 51

W_- …… = 4

$$W = \min(W_+;W_-) = 4$$

počet párů = n = 10

Pokud je W menší než kritická hodnota testu, pak zamítáme hypotézu shody distribučních funkcí obou skupin.

Wilcoxonův test – příklad II

Byla testována nová dieta pro laboratorní krysy, při pokusu byl zjišťován její vliv na různých liniích krys, bylo proto zvoleno párové uspořádání kdy krysy v obou dietách jsou spojeny přes svoji linii, tj. na začátku byly dvojice krys stejné linie, jedna z nich byla náhodně přiřazena k dietě, druhá z dvojice pak do druhé diety.

1. nulová hypotéza je, že váha krys není ovlivněna použitou dietou, alternativní, že ovlivnění dietou existuje
2. spočítáme diference – tyto diference jsou nenormální a proto je vhodné využít neparametrický test
3. Spočítáme sumu pořadí kladných a záporných diferencí, zde je menší suma záporných diferencí – 31
4. výsledkem výpočtu je p>0,05 a tedy nemáme dostatečné důkazy pro zamítnutí nulové hypotézy, nelze říci, že by nová dieta byla efektivnější než stará
5. pro doplnění výsledků je vhodné zjistit také skutečnou velikost rozdílu hmotností ve skupinách, např. ve formě mediánu

Test dobré shody - základní teorie

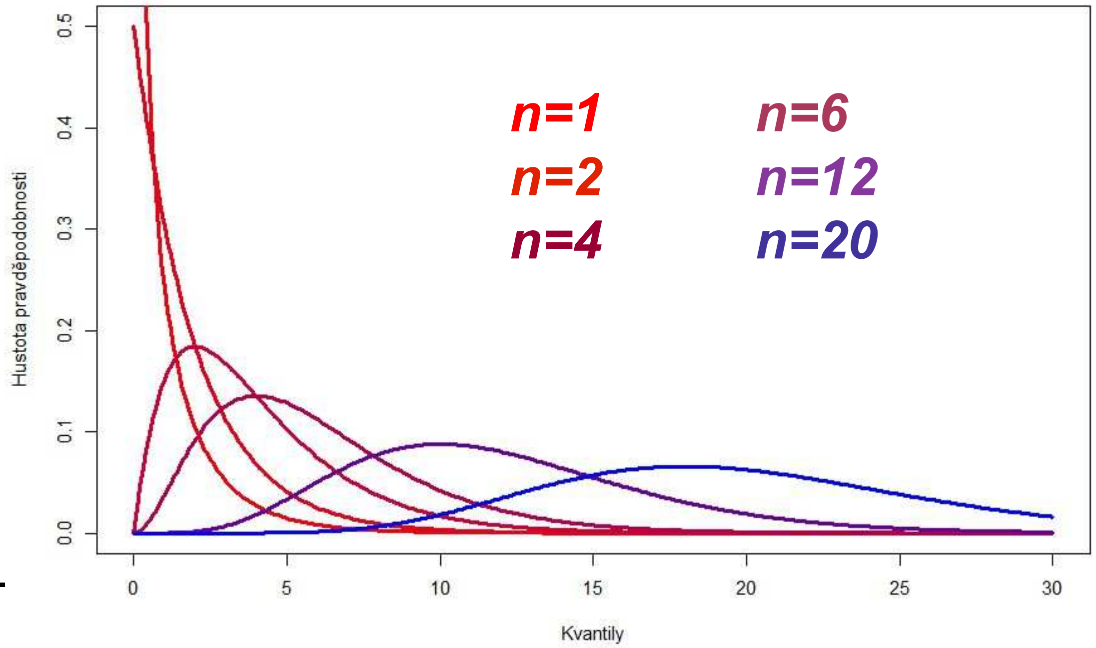
Testuje shodu reálné distribuce hodnot do n skupin s teoretickou distribucí.

Předpokladem je, že velikost rozdílu mezi očekávaným a skutečným počtem hodnot v každé skupině je náhodně rozdělená → multinomické rozdělení.

Součet druhých mocnin relativních rozdílů očekávaného a skutečného počtu hodnot má přibližně χ^2 rozdělení.

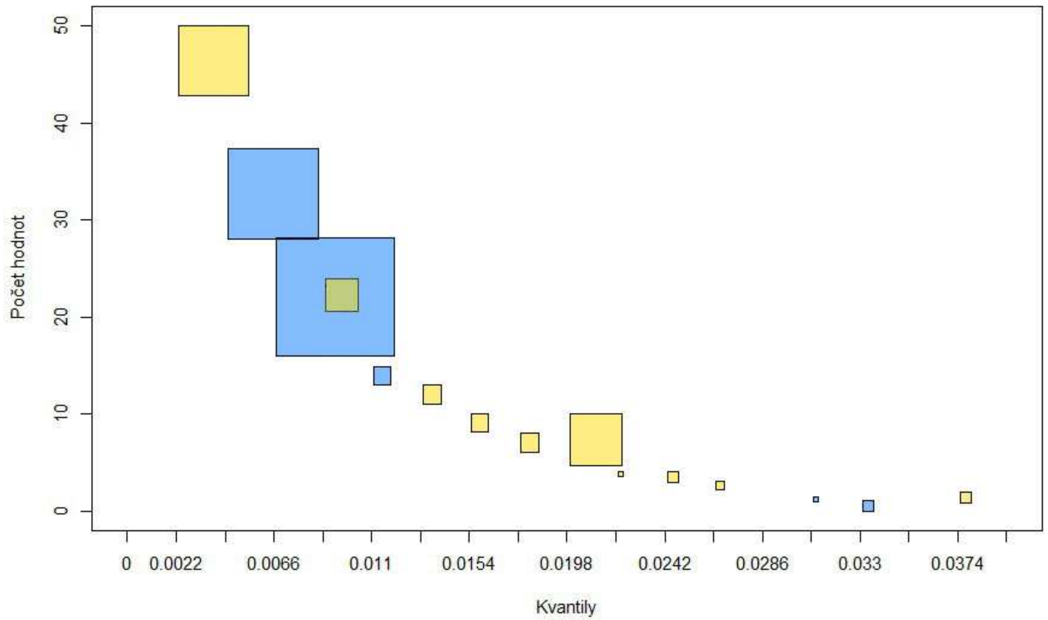
χ^2 rozdělení pro kladné hodnoty (suma čtverců) se liší podle počtu stupňů volnosti k (počtu skupin) - se zvyšujícím se k přechází v normální rozdělení.

$$\chi^2_{(s.v.)} = \sum \frac{\left[\text{pozorovaná četnost} - \text{očekávaná četnost}\right]^2}{\text{očekávaná četnost}}$$



Test dobré shody - základní teorie

$$\chi^2_{(s.v.)} = \underbrace{\frac{\left[\text{pozorovaná četnost} - \text{očekávaná četnost}\right]^2}{\text{očekávaná četnost}}}_{\text{1. jev}} + \underbrace{\frac{\left[\text{pozorovaná četnost} - \text{očekávaná četnost}\right]^2}{\text{očekávaná četnost}}}_{\text{2. jev}} + \ldots$$



Očekávané četnosti

V případě platnosti nulové hypotézy je poměr mezi buňkami jednoho sloupce v různých řádcích nezávislý na výběru tohoto sloupce.

V případě platnosti nulové hypotézy je poměr mezi buňkami jednoho řádku v různých sloupcích nezávislý na výběru tohoto řádku.

Pokud tyto poměry normalizujeme, získáváme tabulku očekávaných četností.

Řádkové a sloupcové součty se touto operací nemění.

Pozorované četnosti

	Ano	Ne	Σ
Ano	20	82	**102**
Ne	10	54	**64**
Σ	**30**	**136**	**166**

$$102 \times 30 \,/\, 166$$

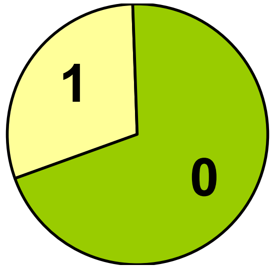
Očekávané četnosti

	Ano	Ne	Σ
Ano	18,4	83,6	**102**
Ne	11,6	52,4	**64**
Σ	**30**	**136**	**166**

Test dobré shody - základní teorie

Binomické jevy (1/0)

$$\chi^2_{(1)} = \underbrace{\frac{\left[\text{pozorovaná četnost} - \text{očekávaná četnost}\right]^2}{\text{očekávaná četnost}}}_{\text{I. jev 1}} + \underbrace{\frac{\left[\text{pozorovaná četnost} - \text{očekávaná četnost}\right]^2}{\text{očekávaná četnost}}}_{\text{II. jev 2}}$$



Příklad

✓ *10 000 lidí hází mincí* → *rub: 4 000 případů (R)*; *líc: 6 000 případů (L)*

? ***Lze výsledek považovat za statisticky významně odlišný (nebo neodlišný) od očekávaného poměru R : L = 1 : 1 ?***

$$\chi^2_{(1)} = \frac{(4000 - 5000)^2}{5000} + \frac{(6000 - 5000)^2}{5000} = 400$$

Tabulková hodnota: $\chi^2_{(0,95)}(\nu = 1) = \underline{\underline{3{,}84}}$ $\quad (0{,}95 = 1 - \alpha)$

Rozdíl je vysoce statisticky významný (p << 0,001]

Znaménkový test

Zjednodušení neparametrického párového Wilcoxonova testu.

Namísto velikosti rozdílů se počítá pouze jejich orientace (signum).

Případy, kde sgn(d) = 0 se z analýzy vylučují.

Sečtou se kladné a záporné rozdíly a menší ze součtů je hledaná statistika m.

Statistika m se porovná s tabulkovou hodnotou pro danou hladinu pravděpodobnosti:

Počet párů *n*	Hladina významnosti (α) 0,01	0,05	0,10
5	-	-	0
6	-	0	0
7	-	0	0
8	0	0	1
9	0	1	1
10	0	1	1
11	0	1	2
12	1	2	2
13	1	2	3
14	1	2	3
15	2	3	3
16	2	3	4
17	2	4	4
18	3	4	5
19	3	4	5
20	3	5	5