Část I

Lineární algebra

Veronika Švandová

Masarykova univerzita, 2012

1 Vektory

S **vektory** jste se již setkali na střední škole, proto by Vám neměly dělat problémy. Vektory jsou **základem lineární algebry**, proto doporučujeme, abyste si v nich udělali jasno – k tomu by Vám měl pomoci náš výukový text. Máte-li potřebné znalosti ze střední školy, můžete rovnou přejít k následující kapitole – maticím.

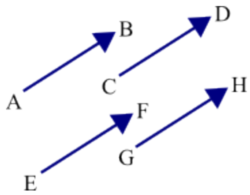
1.1 Teorie

1.1.1 Základní vlastnosti vektorů a operace s vektory

V **chemii** pracujeme s různými veličinami. Tyto veličiny mohou být buď **skalární** – mají jedinou složku představující velikost (např. hmotnost, teplota), nebo **vektorové** – mohou popisovat kromě velikosti také směr a orientaci (např. síla, okamžitá rychlost...), nebo mohou představovat data (např. časová řada, souřadnice, pozice, ...).

Vektor se na střední škole většinou zavádí zvlášť pro nenulový vektor a zvlášť pro nulový vektor. Stručně si zopakujeme běžně uváděné definice.

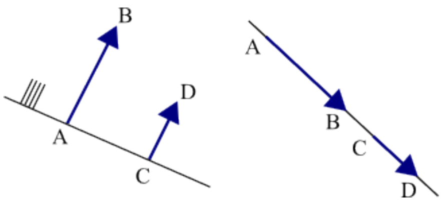
Nenulovým vektorem je označována množina všech **nenulových orientovaných úseček** (tj. úseček, u nichž je určen počáteční a koncový bod), které mají stejnou velikost a stejný směr.



Obrázek 1: Nenulový vektor

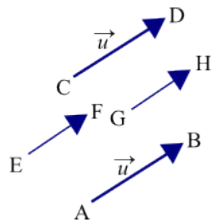
Směr je definován pouze pro nenulové orientované úsečky – dvě takové úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ mají **stejný směr**, jestliže přímky určené těmito úsečkami jsou rovnoběžné a body B, D leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AC (obr. 2 vlevo), nebo přímky určené těmito úsečkami jsou totožné a průnikem polopřímek AB a CD je opět polopřímka (obr. 2 vpravo).

Nulovým vektorem bývá označována množina všech **nulových orientovaných úseček** (úsečky, jejichž počáteční bod je totožný s koncovým, tj. mající nulovou velikost).



Obrázek 2: Směr

Každá orientovaná úsečka tedy **určuje nějaký vektor** (je prvkem množiny orientovaných úseček tvořících tento vektor). **Vektory se označují** malými písmeny se šipkou nahoře (např. $\vec{u}$, $\vec{v}$), v učebnicích se můžete setkat s jejich označením pomocí tučného písma (např. $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$). Nulový vektor se většinou označuje písmenem "o"– $\vec{o}$, resp. $\boldsymbol{o}$. V obrázcích se označení pro konkrétní vektor (dejme tomu $\vec{u}$) může zapsat u každé úsečky, která má stejnou velikost a stejný směr jako úsečka určující vektor $\vec{u}$.



Obrázek 3: Označení vektorů

Jsou-li body A, B dány souřadnicemi $A[a_1, a_2]$ a $B[b_1, b_2]$, resp. v prostoru $A[a_1, a_2, a_3]$ a $B[b_1, b_2, b_3]$, přičemž a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 a b_3 jsou reálná čísla a je-li vektor $\vec{u}$ určen orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$, nazývají se čísla

$$u_1 = b_1 - a_1 \quad \text{a} \quad u_2 = b_2 - a_2, \quad \text{resp. v prostoru i číslo } u_3 = b_3 - a_3 \tag{1.1}$$

souřadnice vektoru $\vec{u}$. Zapisujeme $\vec{u} = (u_1,\ u_2)$, resp. $\vec{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$.

Středoškolské pojetí vektorů nyní rozšíříme nejen na dvou a tří-složkové vektory.

Množinu $\mathbb{R}^n$ uspořádaných n-tic reálných čísel s operacemi definovanými:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \tag{1.2}$$

$$k \cdot \vec{u} = k \cdot (u_1, u_2, \dots, u_n) = (k \cdot u_1, k \cdot u_2, \dots, k \cdot u_n) \tag{1.3}$$

pro všechna $k \in \mathbb{R}$ a $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ nazýváme **reálným algebraickým vektorovým prostorem.**

Prvky tohoto prostoru, tj. uspořádané n-tice reálných čísel $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, nazýváme **algebraickými vektory**[1].

Číslům $u_1, u_2, \dots, u_n$ říkáme **složky vektoru** $\vec{u}$, vektoru $\vec{u} + \vec{v}$ říkáme **součet vektorů** $\vec{u}$ a $\vec{v}$, vektoru $k \cdot \vec{u}$ říkáme **součin čísla** k **s vektorem** $\vec{u}$, číslu n říkáme **dimenze prostoru** $\mathbb{R}^n$, vektoru $\vec{o} = (0, 0, \dots, 0)$ říkáme **nulový vektor**.

[1]Existují **i jiné vektorové prostory** než jen "reálné algebraické". Přívlastkem "Reálný algebraický"máme na mysli, že množina vektorů je tvořena uspořádanými n-ticemi reálných čísel. Obecně však tyto n-tice nemusí být tvořeny pouze reálnými čísly, ale např. čísly racionálními. Vektory dokonce nemusí být jen uspořádané n-tice, ale množinou vektorů může být např. množina všech polynomů. Důležité je, aby vektory a čísla splňovaly tzv. axiomy vektorového prostoru. V tomto textu dále budeme pracovat především s reálným algebraickým vektorovým prostorem a algebraickými vektory a nebude-li řečeno jinak, budeme je stručně nazývat jako **vektorový prostor** a **vektory**.

Vektory tedy **sčítáme** (resp. odečítáme) "**po složkách**". Protože v jednotlivých složkách pracujeme se sčítáním reálných čísel, přenáší se **komutativita a asociativita sčítání** reálných čísel na sčítání vektorů. **Násobení** vektoru číslem provádíme rovněž "**po složkách**".

1.2 Řešené příklady

Příklad 1. *Vypočtěte* $\vec{a} + \vec{b}$, *je-li* $\vec{a} = (1, 2, 1)$ *a* $\vec{b} = (3, 0, -1)$.

Řešení. Sčítání vektorů provedeme postupně, po jejich jednotlivých složkách (podle (1.2)):

$$\vec{a} + \vec{b} = (1, 2, 1) + (3, 0, -1) = (1 + 3, 2 + 0, 1 - 1) = \underline{\underline{(4, 2, 0)}}.$$

Příklad 2. *Vypočtěte* $2 \cdot \vec{b}$, *je-li* $\vec{b} = (3, 0, -1)$.

Řešení. Vynásobení vektoru číslem provedeme postupně, po složkách (podle (1.3)):

$$2 \cdot \vec{b} = 2 \cdot (3, 0, -1) = (2 \cdot 3, 2 \cdot 0, 2 \cdot -1) = \underline{\underline{(6, 0, -2)}}.$$

Příklad 3. *Vypočtěte* $\vec{a} + 2 \cdot \vec{b} - \vec{c}$, *je-li* $\vec{a} = (1, 2, 1), \vec{b} = (3, 0, -1), \vec{c} = (2, 1, 0)$.

Řešení. Nejdříve vynásobíme $\vec{b}$ dvěma (podle (1.3)) a následně všechny vektory sečteme (resp. odečteme - podle (1.2)):

$$\vec{a} + 2 \cdot \vec{b} - \vec{c} = (1, 2, 1) + 2 \cdot (3, 0, -1) - (2, 1, 0) = (1, 2, 1) + (6, 0, -2) - (2, 1, 0) =$$
$$= (1 + 6 - 2, 2 + 0 - 1, 1 - 2 - 0) = \underline{\underline{(5, 1, -1)}}.$$

1.3 Příklady k procvičení

1.3.1 Základní vlastnosti vektorů a operace s vektory

1. Vypočtěte:

   a) $\vec{a} + \vec{o}$, je-li $\vec{a} = (1, 2, 1)$,

   b) $k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b} - k \cdot \vec{c}$, je-li $\vec{a} = (1, 2, 1), \vec{b} = (3, 0, -1), \vec{c} = (2, 1, 0), k = 0$,

   c) $\vec{a} + \vec{b} - 2 \cdot \vec{c}$, je-li $\vec{a} = (1, 2, 1), \vec{b} = (3, 0, -1), \vec{c} = (2, 1, 0)$,

   d) $k_1 \cdot \vec{u}_1 + k_2 \cdot \vec{u}_2 + k_3 \cdot \vec{u}_3$, je-li $\vec{u}_1 = (3, 1, 4), \vec{u}_2 = (2, 0, -5), \vec{u}_3 = (-2, 1, -1), k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = -1$,

   e) $k_1 \cdot \vec{u}_1 + k_2 \cdot \vec{u}_2 + k_3 \cdot \vec{u}_3$, je-li $\vec{u}_1 = (1, 1, 1, 1), \vec{u}_2 = (2, -1, 3, 1), \vec{u}_3 = (0, 0, 1, 2), k_1 = 2, k_2 = -2, k_3 = 3$.

Výsledky

1. Vypočtěte:

   a) $(1, 2, 1)$, tj. $\vec{a}$,

   b) $(0, 0, 0)$,

   c) $(0, 0, 0)$,

   d) $(14, 1, -6)$,

   e) $(-2, 4, -1, 6)$.

2 Matice

Celá řada úloh z **praxe** vede na **řešení soustav rovnic**. V této kapitole si ukážeme, jak se takové soustavy řeší. K tomuto účelu zavedeme základní pojmy lineární algebry: *matice*, *hodnost matice* a *determinant matice*. Ukážeme si dvě **metody řešení** soustav lineárních rovnic, a to *Gaussovu eliminační metodu* a *Cramerovo pravidlo*.

2.1 Teorie

Již ze střední školy umíte řešit soustavu dvou lineárních rovnic

$$\begin{aligned} ax + by &= c, \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

pro neznámé x, y a nějaká daná reálná čísla a, b, c, d, e, f. Řešení se provádí *metodou sčítací*, *dosazovací*, *porovnávací*, nebo *graficky*.

Podobně nás může zajímat hledání řešení soustavy 3 nebo více lineárních rovnic. Hledání řešení soustavy lineárních rovnic je základní úlohou lineární algebry. Soustava dvou rovnic má buď

- právě jedno řešení, nebo
- nekonečně mnoho řešení, nebo
- žádné řešení.

Stejně tak může u soustavy více rovnic nastat pouze jedna z těchto tří možností. Která z nich nastane? Na tuto otázku nám pomohou odpovědět pojmy *matice* a její *hodnost*.

2.1.1 Pojem matice

Matice typu m/n je tabulka $m \cdot n$ čísel sestavená do m řádků a n sloupců. Označujeme ji A resp. $A_{m/n}$ či (a_{ij}):

$$A = A_{m/n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Reálná čísla a_{ij}, $i = 1, ..., m, j = 1, ..., n, m, n \in \mathbb{N}$ nazýváme **prvky matice**.

Je-li $m = n$, nazývá se matice A **čtvercová matice** a číslo n **řád** této **matice**.

Je-li $m \neq n$, říkáme **matici** A **obdélníková**.

Prvky $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{jj}$ leží na tzv. **hlavní diagonále matice**. Hlavní diagonála je tedy tvořena všemi prvky a_{ij}, kde $i = j$.

Prvky $a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, ...$ leží na tzv. **vedlejší diagonále**. Pokud se hovoří o diagonále matice, je tím obvykle myšlena hlavní diagonála.

Příklad

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ je čtvercová matice řádu 2.

Prvky $2, 2$ tvoří hlavní diagonálu matice, prvky $1, 3$ diagonálu vedlejší.

Příklad

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ je obdélníková matice typu $3/4$.

Prvky $2, 6, -2$ tvoří hlavní diagonálu matice, prvky $-2, -1, 5$ diagonálu vedlejší.

Matice $A_{m/n}$, která má všechny prvky rovny nule, se nazývá **nulová matice**.

Příklad

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ jsou dvě různé nulové matice.

Čtvercová matice, která má na hlavní diagonále samé jedničky a jinde má všechny prvky nulové, se nazývá **jednotková matice** a značí se E.

Příklad

Příkladem jednotkové matice může být třeba matice $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.1.2 Operace s maticemi

Součinem matice $A = (a_{ij})$ **s konstantou** $k \in \mathbb{R}$ nazveme matici $C = (c_{ij})$, kde

$$c_{ij} = k \cdot a_{ij}. \tag{2.2}$$

Zapisujeme $C = kA$.

Příklad

Matici tedy vynásobíme konstantou tak, že každý její prvek vynásobíme danou konstantou:

$$3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 & -6 \\ 9 & 18 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Nechť $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ jsou matice téhož typu m/n. **Součtem matic** A a B nazveme matici $C = (c_{ij})$, kde

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{2.3}$$

Zapisujeme $C = A + B$.

Příklad

Matice tedy sčítáme "po odpovídajících si prvcích":

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & -1+(-2) & 2+1 \\ 3+0 & 1+1 & -2+3 \\ 2+2 & 0+4 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pro sčítání matic a násobení matice **konstantou** platí **asociativní**, **komutativní** a **distributivní zákon**.

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu m/r, $B = (b_{ij})$ je matice typu r/n. **Součinem matic** A a B (v tomto pořadí) nazveme matici $C = (c_{ij})$ typu typu m/n, kde

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ir} \cdot b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} \cdot b_{kj} \tag{2.4}$$

pro všechna $i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$. Zapisujeme $C = AB$ (v tomto pořadí).

Násobení matic je definováno pouze v případě, že první matice v součinu má stejný počet sloupců (r) jako má druhá matice počet řádků. Při násobení matic je důležité jejich pořadí, obecně $AB \neq BA$. Navíc může nastat i situace, že součin AB je definovaný (matice jsou vhodného typu), zatímco součin BA vůbec definovaný není. Ale i v případě, kdy jsou oba součiny AB i BA definovány (tzn. A, B jsou čtvercové matice stejného řádu), neznamená to, že $AB = BA$.

Příklad

Matice A a B podle (2.4) násobíme tak, že prvek c_{ij}, který je ve výsledné matici C umístěn na i-tém řádku a j-tém sloupci, dostaneme tak, že vezmeme i-tý řádek matice A a j-tý sloupec matice B, vynásobíme odpovídající si prvky v tomto řádku a sloupci a tyto součiny sečteme. Celý postup by měl být jasný z následujícího příkladu:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot(-1)+0\cdot1+1\cdot3 & 3\cdot3+0\cdot1+1\cdot(-1) & 3\cdot2+0\cdot0+1\cdot2 \\ 5\cdot(-1)+4\cdot1+2\cdot3 & 5\cdot3+4\cdot1+2\cdot(-1) & 5\cdot2+4\cdot0+2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 5 & 17 & 14 \end{pmatrix}.$$

Matice $A = (a_{ij})$ typu m/n a matice $B = (b_{ij})$ je matice typu p/q **jsou si rovny**, jestliže jsou stejného typu (tj. $m = p$ a $n = q$) a jestliže jsou si rovny všechny odpovídající si prvky těchto matic, tj.

$$a_{ij} = b_{ij} \tag{2.5}$$

pro každé i, j. Zapisujeme $A = B$.

Příklad

Matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ je rovna matici $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{pmatrix}$ právě tehdy když x=3.

2.1.3 Hodnost matice

Hodnost matice je důležitým pojmem pro určení **počtu řešení** soustavy lineárních rovnic. Abychom tento pojem pochopili, musíme si nejprve zopakovat pojmy *lineární kombinace vektorů*, *lineární závislost* a *nezávislost vektorů*.

Nechť $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ je konečná posloupnost vektorů z $\mathbb{R}^n$ a $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$. Vektor

$$\vec{v} = k_1 \cdot \vec{u}_1 + k_2 \cdot \vec{u}_2 + \cdots + k_n \cdot \vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \vec{u}_i \tag{2.6}$$

nazýváme **lineární kombinací vektorů** $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$.

Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ nazýváme **lineárně nezávislé** (LN), jestliže z rovnosti

$$k_1 \cdot \vec{u}_1 + k_2 \cdot \vec{u}_2 + \cdots + k_n \cdot \vec{u}_n = \vec{o} \tag{2.7}$$

plyne

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0. \tag{2.8}$$

V opačném případě řekneme, že vektory jsou **lineárně závislé**.

Vidíme, že pojem lineární závislost je opakem pojmu lineární nezávislosti. Co to přesně znamená?

Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ jsou **lineárně závislé** (LZ), jestliže platí $k_1 \cdot \vec{u}_1 + k_2 \cdot \vec{u}_2 + \cdots + k_n \cdot \vec{u}_n = \vec{o}$ a alespoň jedno

$$k_i \neq 0. \tag{2.9}$$

V praktických případech nám pomůže k určení lineární závislosti následující věta.

Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ (pro $n > 1$) jsou **lineárně závislé**, je-li aspoň jeden z nich **lineární kombinací zbývajících vektorů**.[2]

[2] Stačí si uvědomit, že pokud jsou vektory LZ, musí ve vektorové rovnici $k_1 \cdot \vec{u}_1 + k_2 \cdot \vec{u}_2 + \cdots + k_n \cdot \vec{u}_n = \vec{o}$ existovat nenulové k_i. Příslušný vektor u_i pak můžeme z rovnice vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících vektorů: $u_i = -\frac{k_1}{k_i} \cdot \vec{u}_1 + -\frac{k_2}{k_i} \cdot \vec{u}_2 + \cdots + -\frac{k_n}{k_i} \cdot \vec{u}_n$.

Z této věty přímo plyne, že vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ jsou lineárně závislé např. pokud

- jeden z vektorů je **násobkem** jiného vektoru,
- jsou mezi nimi dva vektory **stejné**,
- je mezi nimi alespoň jeden vektor **nulový**.

Jak ale určíme v obecném případě, kolik ze zadaných vektorů může být lineárně závislých/nezávislých? K tomu nám pomůže pojem hodnost matice. **Řádky** matice totiž můžeme chápat jako **vektory**. Místo **lineární ne/závislosti vektorů** pak v případě matic mluvíme o **lineární ne/závislosti** řádků matice.

Hodností matice A rozumíme **maximální počet lineárně nezávislých řádků** matice. Hodnost matice A označujeme $h(A)$.

A jsme u klíčové otázky: **Jak určíme hodnost matice?**

1. Pomocí tzv. *ekvivalentních úprav* převedeme matici do tzv. *schodovitého tvaru.*

   Řekneme, že **matice** a je **ve schodovitém tvaru**, jestliže v matici A každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než řádek předcházející.

   Příklad

   Mějme dvě matice:

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Matice A je ve schodovitém tvaru (pod hlavní diagonálou jsou samé nuly). Matice B ve schodovitém tvaru není, protože 2. a 3. řádek začínají stejným počtem nul.

   Hodnost matice B, která vznikne z matice A některou z následujících úprav:

   a) záměnou řádků,
   b) vynásobením libovolného řádku nenulovým číslem,
   c) přičtením některého řádku, nebo jeho násobku, k jinému řádku,
   d) vynechání řádku, který je lineární kombinací ostatních řádků,[3]

   je rovna hodnosti matice A. Vyjmenované úpravy nazýváme **ekvivalentními úpravami** a zapisujeme $A \sim B$.[4]

2. **Hodnost** původní **matice určíme** z hodnosti matice ve schodovitém tvaru podle následující věty.

   Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna **počtu** jejích **nenulových řádků**.

[3] Možnost d - vynechání řádku, který je lineární kombinací ostatních řádků může např. znamenat vynechání řádku složeného ze samých nul, resp. vynechání řádku, který je totožný s jiným řádkem, nebo který je násobkem jiného řádku. Tyto úpravy však pro samotné určení hodnosti matice není nutné provádět. Stačí převést kterýkoli z těchto řádků na řádek sestávající se ze samých nul, který se do hodnosti matice nezapočítává.

[4] Někdy se též tyto úpravy nazývají jako elementární řádkové **úpravy**.

Příklad

Mějme dvě matice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matice A je ve schodovitém tvaru (pod hlavní diagonálou jsou samé nuly). Obsahuje 3 nenulové řádky, a proto $h(A) = 3$.

Matice B ve schodovitém tvaru není, protože 2. a 3. řádek začínají stejným počtem nul. Proto je třeba tuto matici nejdříve do schodovitého tvaru převést. Toho dosáhneme např. tak, že 2. řádek vynásobíme číslem (-3) a přičteme ho k třetímu řádku:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -13 \end{pmatrix}.$$

Matici B jsme převedli do schodovitého tvaru, ve kterém jsou 3 nenulové řádky. Proto $h(B) = 3$.

2.1.4 Determinant matice

Uvažujme **čtvercovou** matici A řádu n. Ke každé takové **matici přiřadíme** jistým způsobem **číslo**, které nazveme **determinantem matice** A. Determinant matice se hodí např. k řešení soustav rovnic. V následující definici se omezíme jen na **matice řádu 2 a 3**, i když samozřejmě existuje obecná definice i pro matice řádu n.

Buď A čtvercová matice řádu n. **Determinant matice** A je číslo $|A|$ přiřazené matici následujícím způsobem:

a) je-li $n = 2$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2.10}$$

– tzv. **křížové pravidlo**,

b) je-li $n = 3$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{2.11}$$

– tzv. **Sarussovo pravidlo**.

Zapamatovat si vzorec pro výpočet determinantu matic **řádu 2** není žádný problém. Pro matice **řádu 3** se vyplatí uplatnit následující pomůcku: vedle zadaného determinantu opište znovu jeho 1. a 2. sloupec. Členy determinantu s kladným znaménkem dostanete vynásobením prvků matice na hlavní diagonále a diagonálách s ní rovnoběžných, členy determinantu se záporným znaménkem dostanete vynásobením prvků matice na vedlejší diagonále a diagonálách s ní rovnoběžných:

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

2.1.5 Soustavy lineárních rovnic

Již ze střední školy umíte řešit **soustavy (systémy) dvou** lineárních **rovnic** o dvou neznámých (viz úvod k maticím). Nyní budeme uvažovat o řešení obecné soustavy m lineárních rovnic.

Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazýváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Reálné číslo a_{ij}, $i = 1, ..., m, j = 1, ..., n, m, n \in \mathbb{N}$ nazýváme **koeficient** (v i-té rovnici u j-té neznámé), reálné číslo b_i nazýváme **absolutní člen i-té rovnice**.

Řešením soustavy rovnic (2.12) je každá uspořádaná n-tice reálných čísel $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, která dané soustavě vyhovuje, tj. po dosazení čísel k_j za neznámé x_j $(j = 1, ..., n)$ do všech rovnic soustavy jsou všechny tyto rovnice splněny.

Protože pro řešení soustav rovnic jsou **podstatné** pouze jednotlivé **koeficienty**, zavedeme následující definice, které nám umožní zapisovat soustavu (2.12) zjednodušeně.

Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

nazýváme **maticí soustavy** (2.12).

Matici

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{2.14}$$

nazýváme **rozšířenou maticí soustavy** (2.12).

Poznámka. Označíme-li $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, můžeme soustavu (2.12) zapsat zjednodušeně v maticovém tvaru

$$AX = B. \tag{2.15}$$

Frobeniova věta: Soustava m lineárních rovnic o n neznámých $AX = B$ **má řešení** právě tehdy, když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, tj.

$$h(A) = h(\overline{A}). \tag{2.16}$$

Gaussova eliminační metoda

Řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých pomocí tzv. Gaussovy eliminační metody spočívá v tom, že soustavu rovnic nahrazujeme postupně jinými soustavami, které mají stejnou množinu řešení. Toto provádíme tak dlouho, dokud nedojdeme k soustavě, kterou umíme vyřešit. Při řešení postupujeme takto:

1. Zapíšeme **rozšířenou matici** zadané **soustavy** a pomocí ekvivalentních úprav ji převedeme na schodovitý tvar.
2. Na základě **Frobeniovy věty** určíme, **zda** je soustava **řešitelná** a s pomocí následující věty určíme **počet** jejích **řešení**.

   Soustava m lineárních rovnic o n neznámých $AX = B$

   a) nemá **žádné řešení**, pokud hodnost matice soustavy není rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, tj. pokud
   $$h(A) \neq h(\overline{A}). \tag{2.17}$$
   b) **má právě jedno řešení**, pokud hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy a navíc je rovna počtu neznámých, tj. pokud
   $$h(A) = h(\overline{A}) = n. \tag{2.18}$$
   c) **má nekonečně mnoho řešení**, pokud hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy a navíc je tato hodnost menší než počet neznámých, tj. pokud
   $$h(A) = h(\overline{A}) < n. \tag{2.19}$$
   Tato řešení lze vyjádřit pomocí $n - h(A)$ tzv. **volných neznámých** – neznámých, za které můžeme volit libovolná čísla.

3. Pokud **je** soustava **řešitelná** (tj. pokud nastane jeden z případů b či c), **vypočítáme** postupně jednotlivé **neznámé** z rovnic odpovídajících řádkům matice ve schodovitém tvaru, které jsou ekvivalentní původním rovnicím. Vyjadřování provádíme odspodu soustavy.

Platí-li v soustavě (2.12) $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, nazývá se **soustava** (2.12) **homogenní**.

Homogenní soustava rovnic má vždy řešení. Po dosazení okamžitě vidíme, že n-tice $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$, tj. $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ je řešením. Toto **řešení** nazýváme **triviální**. U homogenních soustav lineárních rovnic tedy buď existuje **pouze triviální** řešení, nebo existuje **nekonečně mnoho** řešení.

Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo lze použít pro řešení soustavy n lineárních rovnic o n neznámých. Tj. takových soustav, v nichž je **počet neznámých roven počtu zadaných rovnic**. My si uvedeme toto pravidlo v zjednodušené podobě – pro soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých.

Cramerovo pravidlo: Nechť $AX = B$ je soustava tří lineárních rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Nechť determinant matice této soustavy je různý od nuly, tj. $|A| \neq 0$, $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Nechť A_j je matice, která vznikla z matice A nahrazením j-tého sloupce sloupcem absolutních členů rovnic, $j = 1, 2, 3$. Pro determinanty matic A_j tedy platí:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Pak soustava **má jediné řešení** (x, y, z) přičemž platí:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad z = \frac{|A_3|}{|A|}. \tag{2.21}$$

Je-li $|A| = 0$, pak tato soustavu buď **nemá řešení**, nebo má **nekonečně mnoho řešení**.

2.2 Řešené příklady

2.2.1 Operace s maticemi

Příklad 4. *Vypočtěte součin matic:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Připomeňme, že násobení matic je definováno (podle (2.4)) pouze v případě, že první z matic má tolik sloupců, jako druhá řádků. V našem případě je součin definován a platí, že např. prvek na místě 1,1 v nové matici získáme vynásobením prvků 1. řádku matice A prvky 1. sloupce matice B – a tyto součiny sečteme:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 1 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 2\cdot 1 & 3\cdot(-1) + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}}.$$

Příklad 5. *Vypočtěte součin matic:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Matice vynásobíme podle vzorce (2.4):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2+3 & -2-4+6 & -4-8+12 \\ -2-4+6 & -4-8+12 & -8-16+24 \\ -3-6+9 & -6-12+18 & -12-24+36 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

Výsledkem je tedy **nulová matice**.

Příklad 6. *Vypočtěte $AB - BA$, je li*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Nejdříve vypočteme součiny matic (podle (2.4)):

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-8+1 & 1+4+2 & 1+0+1 \\ 8-4+2 & 2+2+4 & 2+0+2 \\ 4-8+3 & 1+4+6 & 1+0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2+1 & 8+1+2 & 4+2+3 \\ -4+4+0 & -8+2+0 & -4+4+0 \\ 1+4+1 & 2+2+2 & 1+4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

A nyní vypočtené matice odečteme (podle (2.3)):

$$AB - BA = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 11 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}}}.$$

Příklad 7. *Vypočtěte $f(A)$, je li $f(x) = x^2 - 5x + 3$ a $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.*

Řešení. Naším úkolem je najít funkční hodnotu zadané funkce f v bodě A, přičemž tímto bodem je zadaná matice A. Funkční hodnotu v bodě zjistíme klasicky dosazením tohoto bodu do předpisu funkce, tj. dosazením $x = A$ do $f(x)$. Místo čísla 3 zapíšeme do maticové rovnice $3E$:

$$f(A) = AA - 5A + 3E.$$

Do získaného předpisu dosadíme zadanou matici $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Protože sčítání matic je (podle (2.3)) definováno jen pro matice stejného typu, musí být E řádu 2, tj. dosadíme $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$f(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Součin matic AA vypočítáme podle (2.4), součiny $5A$ a $3E$ podle (2.2) a takto vypočtené matice sečteme resp. odečteme podle (2.3):

$$f(A) = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -15 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -15 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

2.2.2 Hodnost matice

Příklad 8. *Určete hodnost matice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.*

Řešení. Zadanou matici převedeme do schodovitého tvaru. Toho dosáhneme např. tak, že první řádek matice opíšeme a zbývající řádky upravíme pomocí ekvivalentních úprav tak, abychom pod prvkem $a_{11} = 4$ měli samé nuly. Vynásobíme 1. řádek číslem (-2) a přičteme ho k 2. řádku, pak vynásobíme 1. řádek číslem (-1) a přičteme ho k 3. řádku, dále vynásobíme 1. řádek číslem (-1) a přičteme ho k 4. řádku a nakonec vynásobíme 1. řádek číslem (-2) a přičteme ho k 3. řádku:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

Shodou okolností se nám objevily samé nuly i pod prvkem $a_{22} = 0$. Všechny řádky od druhého počínaje začínají dvěma nulami – 1. a 2. řádek opíšeme a pomocí ekvivalentních úprav se pokusíme získat samé nuly pod prvkem $a_{23} = 3$. Nejdříve 2. řádek přičteme k 3. řádku, dále 2. řádek vynásobíme číslem (-2) a přičteme k 4. řádku a nakonec 2. řádek vynásobíme číslem (-3) a přičteme k 5. řádku:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tím se nám povedlo převést matici do schodovitého tvaru. V této matici jsou dva nenulové řádky, a proto hodnost zadané matice je dva:

$$\underline{\underline{h(A) = 2.}}$$

Příklad 9. *Určete hodnost matice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení. Zadanou matici převedeme pomocí ekvivalentních úprav do schodovitého tvaru. První řádek začíná nulou – bude vhodnější ho umístit jako 2. řádek. Jako první řádek bude nejvýhodnější umístit 4. řádek začínající číslem 1 – jeho násobením čísly (-4) a (-10) a přičítáním k 2. a 3. řádku snadno vytvoříme samé nuly pod prvkem a_{11}:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -52 & -130 & -13 \end{pmatrix}.$$

3. a 4. řádek matice zjednodušíme, aby se nám s nimi lépe počítalo. 3. řádek vydělíme číslem 4, 4. řádek vydělíme číslem 13:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -52 & -130 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -4 & -10 & -1 \\ 0 & -4 & -10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nyní vytvoříme samé nuly i pod prvkem $a_{22} = 4$ – stačí 1. a 2. řádek opsat a 2. řádek přičíst k 3. a 4. řádku:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -4 & -10 & -1 \\ 0 & -4 & -10 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tím se nám povedlo převést matici do schodovitého tvaru. V této matici jsou dva nenulové řádky, a proto hodnost zadané matice je dva:

$$\underline{\underline{h(A) = 2}}.$$

2.2.3 Determinant matice

Příklad 10. *Vypočtěte determinant:*

a) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$,

b) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

Řešení.

a) Zadaný determinant vypočteme pomocí **křížového pravidla** (2.10):
$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 = 15 - 14 = \underline{\underline{1}}.$

b) Zadaný determinant je opět řádu 2 – použijeme také **křížové pravidlo** (2.10):
$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha - (-\sin^2\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \underline{\underline{1}}.$

c) Zadaný determinant je řádu 3 – použijeme také **Sarussovo pravidlo** (2.11). Pro snadnější výpočet využijeme pomůcky – opsání prvních dvou sloupců determinantu (viz vysvětlení pod definicí determinantu): $\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \end{array}\right. = 1 \cdot 2 \cdot 6 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 6 =$
$= 12 + 3 + 3 - 2 - 9 - 6 = 18 - 17 = \underline{\underline{1}}.$

2.2.4 Soustavy lineárních rovnic

Příklad 11. *Řešte soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 7x_2 & - & 5x_3 & - & 5x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}.$$

Řešení. Napíšeme rozšířenou matici soustavy a pomocí ekvivalentních úprav ji převedeme na schodovitý tvar. První řádek opíšeme a poté jej postupně vynásobíme čísly (-2), (-1) a (-3) a tyto násobky postupně přičteme k 2., 3. a 4. řádku:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & -6 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

třetí řádek zjednodušíme – vydělíme ho číslem 3:

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

a třetí řádek prohodíme s druhým řádkem:

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Abychom vytvořili pod prvkem $a_{22} = 3$ samé nuly, mohli bychom 2. řádek vynásobit číslem $(\frac{-5}{3})$ a přičíst k 3. a 4. řádku. To bychom však museli sčítat zlomky. Druhou možností je vynásobit 2. řádek číslem (-5) a přičíst ho k trojnásobku 3. a 4. řádku. Abychom se nespletli, můžeme provést výpočet ve dvou krocích – nejdříve vynásobit 3. a 4. řádek číslem 3 a poté k nim přičíst (-5)-násobek 2. řádku:

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 15 & -9 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 15 & -15 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

a nakonec 3. řádek vynásobíme číslem 5 a přičteme ho ke 4. řádku:

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -9 & 0 \end{array}\right).$$

Vidíme, že hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, tj. $h(A) = h(\overline{A}) = 4$. Podle Frobeniovy věty to tedy znamená, že soustava **má řešení**.

Zadaná soustava má 5 neznámých ($n = 5$), a protože $h(A) < n$, bude mít **nekonečně mnoho řešení**. Zvolíme $n - h(A)$, tj. 1 volnou neznámou. Nechť $x_5 = t; t \in \mathbb{R}$.

Ze 4. řádku upravené matice dostáváme rovnici:

$$\begin{aligned} 9x_4 - 9x_5 &= 0 \\ 9x_4 - 9t &= 0. \\ x_4 &= t \end{aligned}$$

Ze 3. řádku upravené matice dostáváme rovnici:

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ x_3 + t - t &= 0. \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ze 2. řádku upravené matice dostáváme rovnici:

$$\begin{aligned} 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 3x_2 - 0 - 2t + 2t &= 0. \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Z 1. řádku upravené matice dostáváme rovnici:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 - 0 + 0 + t - t &= 0. \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Zkoumaná soustava má nekonečně mnoho řešení tvaru $\underline{\underline{(0, 0, 0, t, t)}}; t \in \mathbb{R}$.

Příklad 12. *Řešte soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \end{array}.$$

Řešení. Napíšeme rozšířenou matici soustavy a pomocí ekvivalentních úprav ji převedeme na schodovitý tvar. První řádek opíšeme a poté jej postupně vynásobíme čísly (-2), (-1) a (-1) a tyto násobky postupně přičteme k 2., 3. a 4. řádku. Analogicky budeme postupovat v dalších krocích:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Vidíme, že hodnost matice soustavy není rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, tj. $h(A) = 3 \neq h(\overline{A}) = 4$. Podle Frobeniovy věty to tedy znamená, že soustava **nemá řešení**.

Příklad 13. *Řešte soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 11 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 1x_3 & + & 2x_4 & = & 13 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 14 \end{array}.$$

Řešení. Napíšeme rozšířenou matici soustavy a pomocí ekvivalentních úprav ji převedeme na schodovitý tvar – analogicky, jako v předchozích dvou příkladech:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 2 & 8 & 10 & 20 \\ 0 & 7 & 10 & 13 & 30 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -36 & -40 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & -40 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Vidíme, že hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, tj. $h(A) = h(\overline{A}) = 4$. Podle Frobeniovy věty to tedy znamená, že soustava **má řešení**.

Zadaná soustava má 4 neznámé ($n = 4$), a protože $h(A) = n$, bude mít **právě jedno řešení**.

Ze 4. řádku upravené matice dostáváme rovnici:

$$x_4 = 1.$$

Ze 3. řádku upravenématice dostáváme rovnici:

$$\begin{aligned} x_3 - x_4 &= 0 \\ x_3 - 1 &= 0. \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Ze 2. řádku upravené matice dostáváme rovnici:

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= 10 \\ x_2 + 2 + 7 &= 10. \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Z 1. řádku upravené matice dostáváme rovnici:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 11. \\ x_1 + 2 + 3 + 4 &= 11 \\ x_1 &= 2 \end{aligned}$$

Zkoumaná soustava má právě jedno řešení $\underline{\underline{(2, 1, 1, 1)}}$.

Příklad 14. *Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} -3x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & 3z & = & 1 \end{array} .$$

Řešení. Nejprve vypočteme determinant matice A:

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -27 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 = -16.$$

Vypočtený determinant je různý od nuly, a proto bude mít soustava jediné řešení, které určíme podle Cramerova pravidla. Kdyby se vypočtený determinant rovnal nule, nemohli bychom o počtu řešení rozhodnout a soustavu bychom řešili Gaussovou eliminační metodou. Abychom mohli Cramerovo pravidlo uplatnit, vypočteme determinanty $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 + 1 + 1 + 3 - 1 + 3 = 16$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 + 1 + 1 - 1 + 3 + 3 = 16$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 1 + 1 + 3 + 3 - 1 = 16.$$

Dostáváme tak:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = -1, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = -1, \quad z = \frac{|A_3|}{|A|} = -1.$$

Zkoumaná soustava má právě jedno řešení $\underline{\underline{(-1, -1, -1)}}$.

2.3 Příklady k procvičení

2.3.1 Operace s maticemi

1. Vypočítejte $2A - 3B$ pro matice: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Vypočítejte AB a BA pro matice: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Vypočítejte AB a BA pro matice: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Vypočítejte B^2 pro matici $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Vypočítejte $A + B$, $2A$ a $3B - A$ pro matice:

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

   b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 7 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Nalezněte matici $C = A^2 + A + E$, je-li $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Výsledky

1. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A.B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 19 \end{pmatrix}$, $B.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 14 \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$

3. $A.B$ - součin není definován, $B.A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$

4. $B^2 = B.B = \begin{pmatrix} 32 & 12 & 16 \\ 48 & 12 & 24 \\ 16 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

5. a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $3B - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$

   b) $A + B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -1 \\ 9 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $2A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 14 & 2 & -6 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $3B - A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ -1 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

2.3.2 Hodnost matice

Určete hodnost matice A:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Výsledky

a) $h(A) = 3$, b) $h(A) = 4$, c) $h(A) = 2$, d) $h(A) = 3$

2.3.3 Determinant matice

1. Vypočtěte determinant:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{3} & 3-\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} & 1-\sqrt{3} \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Vypočtěte determinant a vyřešte algebraickou rovnici:

a) $\begin{vmatrix} 9-x & 12 \\ 12 & 16-x \end{vmatrix} = 0$, b) $\begin{vmatrix} 5-x & 2 \\ 2 & 8-x \end{vmatrix} = 0$.

Výsledky

1. a) 12, b) 0, c) -6, d) -1, e) 54
2. a) $x_1 = 0$, $x_2 = 25$, b) $x_1 = 4$, $x_2 = 9$

2.3.4 Soustavy lineárních rovnic

1. Řešte nehomogenní soustavu lineárních rovnic:

a) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 14 \end{array}$,

b) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -9 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \\ 5x_1 & + & 12x_2 & + & 6x_3 & = & 29 \end{array}$,

c) $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & & & = & 12 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 27 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 33 \end{array}$,

d) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & - & 4x_3 & - & 2x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \end{array}$,

e) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 2 \\ 3x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \end{array}$,

f) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ 7x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & - & 6x_4 & = & 3 \end{array}$,

g) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -2 \\ -3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -18 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 8 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & -10 \end{array},$$

h) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 12x_4 & = & 10 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 9 \end{array}.$$

2. Řešte homogenní soustavu lineárních rovnic:

a) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 10x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & + & 20x_4 & = & 0 \end{array},$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array},$$

c) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 7x_2 & - & 5x_3 & - & 5x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}.$$

3. Za využití Cramerova pravidla řešte soustavu lineárních rovnic:

a) $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 14 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 16 \end{array},$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array},$$

c) $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \end{array}.$$

Výsledky

1. Nehomogenní soustavy lineárních rovnic:

a) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$

b) $x_1 = -\frac{25+18t}{11}$, $x_2 = \frac{37+2t}{11}$, $x_3 = t$ kde $t \in \mathbb{R}$

c) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$

d) $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2$

e) $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$

f) soustava nemá řešení

g) $x_1 = 2$, $x_2 = 6 + t$, $x_3 = t$, $x_4 = 0$, kde $t \in \mathbb{R}$

h) $x_1 = 2 + t$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3 + 5t$, $x_4 = t$, kde $t \in \mathbb{R}$

2. Homogenní soustavy lineárních rovnic:

a) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

b) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

c) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = x_5 = t$, kde $t \in \mathbb{R}$

3. Cramerovo pravidlo:

a) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$

b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

c) $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$