Skupina D

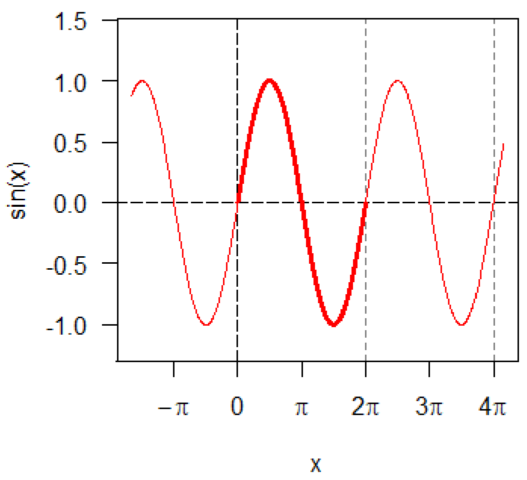
2.1 Vlastnosti základních funkcí

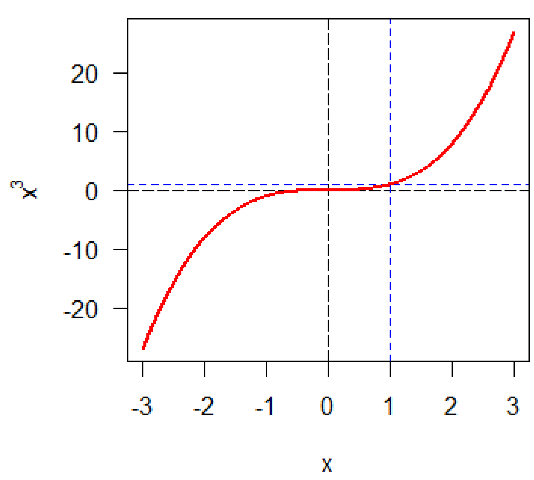
2.1 Základní vlastnosti funkce sin(x)

1. Definiční obor: D(f) = (-∞;∞)
2. Obor hodnot: H(f) = <-1; 1>
3. Spojitost: je spojitá
4. Ohraničenost: je ohraničení zdola i shora
5. Periodicita: je periodická
6. Parita:
7. Monotónnost: je
8. Limity funkce:

2.2 Základní vlastnosti funkce x^3

1. D(f) = (-∞;∞)
2. H(f) = (-∞;∞)
3. Je spojitá
4. Není ohraničená
5. Není periodická
6. Parita
7. Je monotónní
8. Limity funkce:





2.2 Výpočty limit

2.3 Hornerovo schéma

1) $x^2 - 3x + 2$ možné kořeny: ±1 ±2

	1	-3	2
1	1	-2	0
-1	1	-4	6
2	1	-1	0

Kořeny: -2, 1

Výsledek: $(x-2)(x-1)$

2) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ možné kořeny: ±1 ±2 ±4 ±8

	1	-3	-6	8
1	1	-2	-8	0
1	1	-2	-10	-2
-1	1	-3	-5	5
2	1	0	-8	
-2	1	-4	0	
1	1	-3	-3	
4	1	0		

Kořeny: -1; 2; -4

Výsledek: $(x-1)(x+2)(x-4)$

2.4 Limity funkcí ve vlastním bodě

1)

$$lim_{x\to 2}\, x^3 + x - 5 = 2^3 + 2 - 5 = 5$$

2)

$$lim_{x\to 1} \frac{5^x + 3^x}{2^x} - 1 = \frac{8}{2} = 3$$

3)

$$lim_{x\to 4} \frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{x^2 - 2x - 8} = \frac{4^3 - 4 * 4^3 - 4 + 4}{4^2 - 8 - 8} = \frac{64 - 64 - 4 + 4}{0} = \frac{0}{0}$$

$$lim_{x\to 4} \frac{(x^3 - 4x^2 - x + 4)'}{(x^2 - 2x - 8)'} = \frac{(3x^2 - 8x - 1 + 0)}{2x - 2 * 1} = \frac{3 * 4^2 - 8 * 4 - 1}{2 * 4 - 2} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

4)

$$lim_{x\to -3} \frac{2x^2 + x + 3}{3x + 5} = \frac{2 * (3)^2 + (-3) + 3}{3 * (-3) + 5} = \frac{2 * 9 - 3 + 3}{-9 + 5} = \frac{18}{-4} = -\frac{9}{2}$$

2.5 Limity funkcí v nevlastním bodě

1)

$$lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{4}=\infty$$

2)

$$lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-x^4-6x^6+x^3}{x^2-x^3+4}=\frac{-6x^6-x^4-x^3+5x^2}{-x^3+x^2+4}$$

$$=\frac{x^6(6+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}^3-\frac{5}{x^4})}{x^6(\frac{1}{x}^3-\frac{1}{x}^4-\frac{4}{x^6})}=lim_{x\to-\infty}\frac{(\frac{1}{6}+x^2-x^3-\frac{x^4}{5})}{(x^3-x^4-\frac{x^6}{4})}=\infty$$

3)

$$lim_{x\to-\infty}\frac{4^x+6^x}{4^x}=\frac{(4^{-\infty}+6^{-\infty})}{(4^{-\infty})}$$

$$lim_{x\to-\infty}(\frac{4}{4})^x+(\frac{6}{4})^x=lim_{x\to\infty}(\frac{4}{4})^x+(\frac{4}{6})^x=1+0=1$$

4)

$$lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^3+4}{5x^2-5x^4+x+3}=\frac{-x^3+x^2+4}{-5x^4+5x^2+x+3}=\frac{x^4(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^4})}{x^4(-5+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4})}=-\frac{0}{5}=0$$

5)

$$lim_{x\to\infty}=\frac{4^x-5}{3^x-2}=lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(1)}{(4)^x}-5}{(\frac{1}{3})^x-2}=\frac{5}{2}$$

6)

$$lim_{x\to\infty}\frac{3^x+5^x}{7^x}=lim_{x\to\infty}\frac{3^\infty+5^\infty}{7^\infty}=\frac{\infty}{\infty}=(\frac{3}{7})^x+(\frac{5}{7})^x=0+0=0$$

7)

$$lim_{x\to-\infty}\frac{3x^6-1+4x^2}{3x^3-x^2+4x^4-x^6}=\frac{3x^6+4x^2-1}{x^6+4x^4+3x^3-x^2}=\frac{x^6(3+\frac{4}{x^4}-\frac{1}{x^6})}{x^6(1+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x}^4)}=3$$

8)

$$lim_{x\to\infty}\frac{4^x-8^x}{5^x}=\frac{4^\infty-8^\infty}{5^\infty}=\frac{-\infty}{\infty}=(\frac{4}{5})^x-(\frac{8}{5})^x=-\infty$$

2.3 Výpočty derivací

2.6 Derivace prvního řádu funkce

1)

$$\left(\frac{x^2 - x + 1}{\cos(x)}\right)' = \frac{(2x-1)cosx + (x^2 - x + 1)sinx}{cos^2x}$$

2)

$$x^6 - x^{-6} - x^0 + \cos(x) - lm(x))' = 6x^5 + 6x^{-7} - sinx - \frac{1}{x}$$

3)

$$\left(\frac{e^{-x}}{1-x}\right)' = \frac{e^{-x}(1-x) - e^{-x}}{(1-x)^2} = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$$

4)

$$(3xtan(x) + (3x - x^4)e^x)' = 3tanx + \frac{3x}{cos^2x} + (3 - 4x^3)e^x + e^x(3x - x^4)$$
$$= 3tanx + \frac{3x}{cos^2x} + e^x(3 - 4x^3 + 3x - x^4)$$

5)

$$(2\cos(x)\sin(x) - e^x\tan(x))' = -2sin^2x + 2cos^2x - e^xtanx - \frac{e^x}{cos^2x}$$

6)

$$\left(\frac{x^2 - 2x + 1}{4x - 2}\right)' = \frac{(2x-2)(4x-2) - (x^2 - 2x + 1)(4)}{4(2x-1)^2} = \frac{(8x^2 - 4x - 8x + 4) - 4x^2 + 8x - 4}{(2x-1)^2}$$
$$= \frac{4x^2 - 4x}{(2x-1)^2} = \frac{x(x-1)}{(2x-1)^2}$$

7)

$$(x^7 + 3x^5 - 2x^2 + x + 7)' = x + 15x^4 - 4x + 1$$

8)

$$(3cos^2(x) - 4cos(x^2))' = -6\cos(x)\sin(x) + 8xsin(x)$$

2.7 Derivace druhého řádu funkce

1)

$$\left((x^5 - x)e^x\right)'' = (e^x(x^5 - x) + (5x^4 - 1)\,e^x)' = e^x(x^5 - x) + 2(5x^4 - 1)e^x + (20x^3)e^x$$

2)

$$(2\cos(x)\,e^x)'' = (-2sinxe^x + 2cosxe^x)' = -2cosxe^x - 2sinxe^x - 2sinxe^x + 2cosxe^x = -4sinxe^x$$

3)

$(\ln(\cos(x)) + \ln(\ln(x)))''$ - nevychází podle zadání

4)

$$(x^7 + 3x^5 - 2x^2 + x + 7)'' = (7x^6 + 15x^4 - 4x + 1)' = 42x^5 + 60x^3 - 4$$

2.4 L´Hospitalovo pravidlo

2.8

1)

$$lim_{x\to 4}\frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{x^2 - 2x - 8} = lim_{x\to 4}\frac{4^3 - 4 * 4^2 - 4 + 4}{16 - 8 - 8} = \frac{0}{0}$$

$$lim_{x\to 4}\frac{(x^3 - 4x^2 - x + 4)'}{(x^2 - 2x - 8)} = \frac{3x^2 - 8x - 1}{2x - 2} = lim_{x\to 4}\frac{48 - 32 - 1}{8 - 2} = \frac{5}{2}$$

2)

$$lim_{x\to 4}\frac{x^3 - 4x^2 + x + 4}{x^2 - 2x - 8} = lim_{x\to 4}\frac{64 - 64 - 4 + 4}{16 - 8 - 8} = \frac{8}{0}$$

➔ Nelze

3)

$$lim_{x\to 3}\frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9} = +\frac{54 - 45 - 12 + 3}{9 - 9} = \frac{0}{0}$$

$$lim_{x\to 3}\frac{(2x^3 - 5x^2 - 4x + 3)'}{(x^2 - 9)'} = \frac{6x^2 - 10x - 4}{2x} = \frac{54 - 30 - 4}{6} = \frac{10}{3}$$