

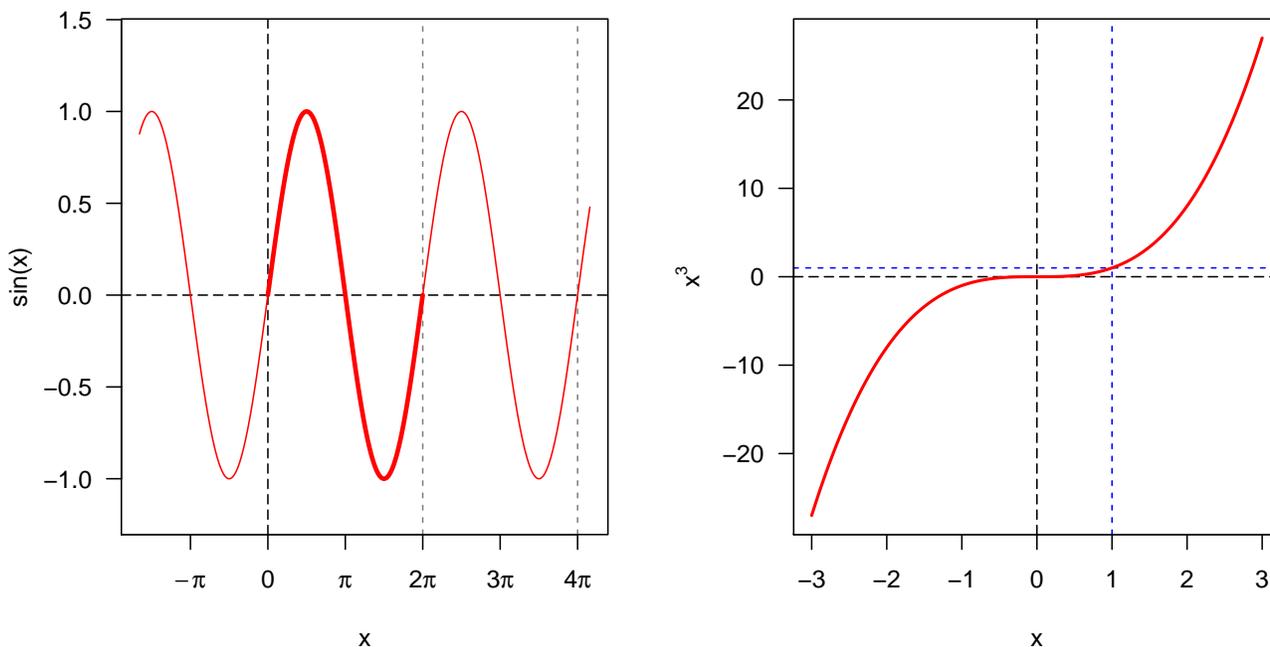
PŘÍKLADY KE CVIČENÍ PŘEDMĚTU C1460: ÚVOD DO MATEMATIKY
TÉMA 2: LIMITY A DERIVACE

SKUPINA: D

VERONIKA BENDOVÁ
PODZIMNÍ SEMESTR, 2018**2.1 Vlastnosti základních funkcí****Příklad 2.1. Základní vlastnosti funkce $\sin(x)$** Na obrázku 1 vlevo je zobrazený graf funkce $f(x) = \sin(x)$. Na základě grafu stanovte

1. definiční obor funkce $f(x)$;
2. obor hodnot funkce $f(x)$;
3. spojitost funkce $f(x)$ na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
4. ohraničenost funkce $f(x)$ (horní / dolní / globální ohraničenost funkce $f(x)$);
5. periodicitu funkce $f(x)$, případně její periodu;
6. paritu funkce;
7. monotónnost funkce na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
8. + uveďte limity funkce v zajímavých bodech, jsou-li nějaké.

Své závěry stručně zdůvodněte.

Obrázek 1: Graf funkce $\sin(x)$ (vlevo); graf funkce x^3 (vpravo)

Příklad 2.2. Základní vlastnosti funkce x^3

Na obrázku 1 vpravo je zobrazený graf funkce $f(x) = x^3$. Na základě grafu stanovte

1. definiční obor funkce $f(x)$;
2. obor hodnot funkce $f(x)$;
3. spojitost funkce $f(x)$ na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
4. ohraničenost funkce $f(x)$ (horní / dolní / globální ohraničenost funkce $f(x)$);
5. periodicitu funkce $f(x)$, případně její periodu;
6. paritu funkce;
7. monotónnost funkce na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
8. + uveďte limity funkce v zajímavých bodech, jsou-li nějaké.

Své závěry stručně zdůvodněte.

2.2 Výpočty limit**Příklad 2.3. Hornerovo schéma: Rozklad polynomu na kořenové činitele**

Rozložte na kořenové činitele následující polynomy

1. $x^2 - 3x + 2$ $(x - 1) \times (x - 2)$
2. $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ $(x - 4) \times (x + 2) \times (x - 1)$

Příklad 2.4. Limity funkcí ve vlastním bodě

Vypočítejte následující limity

1. $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 + x - 5$ 5
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5^x + 3^x}{2^x} - 1$ 3
3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{x^2 - 2x - 8}$ $\frac{5}{2}$
4. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + x + 3}{3x + 5}$ $-\frac{9}{2}$

Příklad 2.5. Limity funkcí v nevlastním bodě

Vypočítejte následující limity

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{4}$ ∞
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - x^4 - 6x^6 + x^3}{x^2 - x^3 + 4}$ ∞
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x + 6^x}{4^x}$ 1
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^3 + 4}{5x^2 - 5x^4 + x + 3}$ 0
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x - 5}{3^x - 2}$ $\frac{5}{2}$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 5^x}{7^x}$ 0
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^6 - 1 + 4x^2}{3x^3 - x^2 + 4x^4 - x^6}$ -3
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x - 8^x}{5^x}$ $-\infty$

2.3 Výpočty derivací

Příklad 2.6. Derivace prvního řádu funkce

Vypočítejte následující derivace

1. $\left(\frac{x^2 - x + 1}{\cos(x)}\right)'$ $\frac{(2x-1)\cos(x) + (x^2-x+1)\sin(x)}{\cos^2(x)}$
2. $(x^6 - x^{-6} - x^0 + \cos(x) - \ln(x))'$ $6x^5 + 6x^{-7} - \sin(x) - \frac{1}{x}$
3. $\left(\frac{e^{-x}}{1-x}\right)'$ $\frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$
4. $(3x \tan(x) + (3x - x^4)e^x)'$ $3 \tan(x) + \frac{3x}{\cos^2(x)} + e^x(3 - 4x^3 + 3x - x^4)$
5. $(2 \cos(x) \sin(x) - e^x \tan(x))'$ $-2 \sin^2(x) + 2 \cos^2(x) - e^x \tan(x) - \frac{e^x}{\cos^2(x)}$
6. $\left(\frac{x^2 - 2x + 1}{4x - 2}\right)'$ $\frac{x(x-1)}{(2x-1)^2}$
7. $(x^7 + 3x^5 - 2x^2 + x + 7)'$ $7x^6 + 15x^4 - 4x + 1$
8. $(3 \cos^2(x) - 4 \cos(x^2))'$ $8x \sin(x^2) - 6 \sin(x) \cos(x)$

Příklad 2.7. Derivace druhého řádu funkce

Vypočítejte následující druhé derivace

1. $((x^5 - x)e^x)''$ $(x^5 + 10x^4 + 20x^3 - x - 2)e^x$
2. $(2 \cos(x)e^x)''$ $-4 \sin(x)e^x$
3. $(\ln(\cos(x)) + \ln(\ln(x)))''$ $-\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{\ln(x) + 1}{(x \ln(x))^2}$
4. $(x^7 + 3x^5 - 2x^2 + x + 7)''$ $42x^5 + 60x^3 - 4$

2.4 l'Hospitalovo pravidlo

Příklad 2.8. l'Hospitalovo pravidlo

Zjistěte, zda je následující limity možné vypočítat pomocí l'Hospitalova pravidla. Pokud ano, vypočítejte je.

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{x^2 - 2x - 8}$ $\frac{5}{2}$
 2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 4}{x^2 - 2x - 8}$ *l'Hospitalovo pravidlo nelze použít*
 3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$ $\frac{10}{3}$
- navíc $\lim_{x \rightarrow 1^-} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1}$ neexistuje.*