Základy teoretické fyziky

Příklad:y ke zkoušce

1. Variační princip

Příklad: 1 Snellův zákon

Odvoďte Snellův zákon pro lom a odraz na rovinném rozhraní dvou prostředí charakterisovaných indexy lomu n_1 a n_2.

Příklad: 2 Akce v akci

Spočtěte explicitní akci vyjádřenou pomocí počátečních x_i a koncových x_f souřadnic a počátečního t_i a koncového t_f času pro jednorozměrné případy popsané Lagrangeovou funkcí:

a) $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, b) $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + gx$, c) $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

Návod: zdá se výhodným brát postupně řešení ve tvaru

$$x = x_i \frac{t_f - t}{t_f - t_i} + x_f \frac{t - t_i}{t_f - t_i},$$

$$x = x_i \frac{t_f - t}{t_f - t_i} + x_f \frac{t - t_i}{t_f - t_i} - \frac{g}{2m}(t_f - t)(t - t_i),$$

a

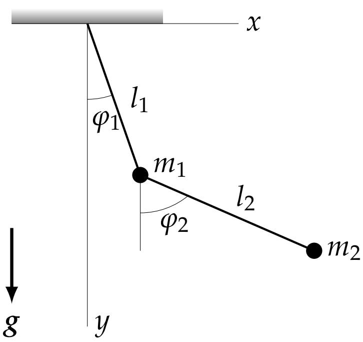
$$x = x_i \frac{\sin\omega(t_f - t)}{\sin\omega(t_f - t_i)} + x_f \frac{\sin\omega(t - t_i)}{\sin\omega(t_f - t_i)}.$$

2. Kmity

Příklad: 3 Dvojité kyvadlo

Pro dvojité rovinné kyvadlo v homogenním gravitačním poli (značení na Obrázku 1.) je Lagrangeova funkce

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$
$$+ (m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2.$$



Obrázek 1: Dvojité kyvadlo

Odvoďte a vyřešte Lagrangeovy rovnice za předpokladu malých kmitů ($\varphi_1 \ll 1$, $\varphi_2 \ll 1$).

3. Pohyb v centrálním poli

Pohyb se děje v rovině, Lagrangeova funkce v polárních souřadnicích je

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r). \tag{1}$$

Příklad: 4 Keplerova úloha

Odvoďte pro Lagrangeovu funkci (1) Lagrangeovy rovnice. Z těchto rovnic odvoďte zákon zachování momentu hybnosti a rovnici trajektorie

$$u \equiv \frac{1}{r}, \quad \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = -\frac{m}{l^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}U\left(\frac{1}{u}\right), \quad l = mr^2\dot{\varphi} = \text{konst.} \tag{2}$$

Příklad: 5 Kardioida

Jaký tvar musí mít potenciální energie v (1), aby měla trajektorie tvar kardioidy

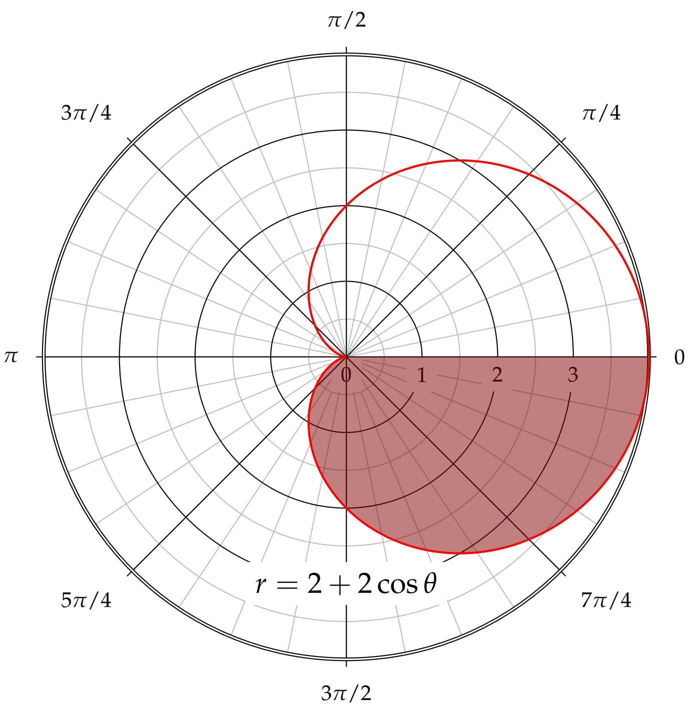
$$r = a(1 + cos\varphi), \quad a = \text{konst.},$$

z Obrázku 2. Při řešení úlohy je vhodné užít rovnici trajektorie ve tvaru (2).

Příklad: 6 Neznámý potenciál

Najděte řešení pohybových rovnic s potenciální energií v (1) danou vztahem

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}, \quad \alpha > 0.$$



Obrázek 2: Ilustrace kardioidy

Příklad: 7 Záměrná vzdálenost

Částice s energií E a momentem hybnosti vzhledem k počátku souřadné soustavy velikosti l vstupuje do oblasti přitažlivého potenciálového pole. Pohyb je popsán Lagrangeovou funkcí (1). Spočtěte hodnotu $r_{\min}$ minimálního přiblížení k počátku.

4. Tuhé těleso

Příklad: 8 Precese

Setrvačník v gravitačním poli (Obrázek 3) má hmotnost M a jeho počáteční (nestabilní) poloha a rychlost naklánění osy jsou $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0$. Lagrangeova funkce je

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta) - Mgl \cos \theta,$$

kde θ, φ, ψ jsou Eulerovy úhly, I_1 a I_3 momenty setrvačnosti a l je vzdálenost středu hmotnosti C od pevného bodu rotace O. Odvoďte nejprve integrály pohybu a pak ukažte, že časová závislost úhlu náklonu je dána vztahem (není potřeba vztah integrovat)

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4Mgl}{I_1} \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{I_3^2 \omega_3^2}{I_1^2} \tan^2 \frac{\theta}{2}. \tag{3}$$

Ze vztahu (3) určete konečný úhel náklonu.

Příklad: 9 Symetrický setrvačník

Vyřešte Eulerovy rovnice pro symetrický setrvačník ($I_1 = I_2 \neq I_3$) a popište slovně výsledný pohyb.

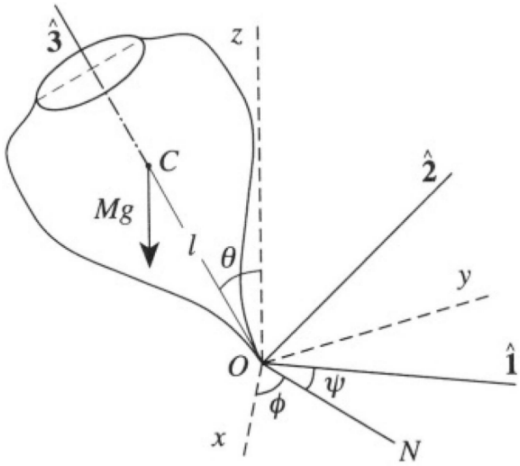
5. Pružná tělesa

Příklad: 10 Vlastní gravitace koule

Určete složky tensoru napětí v kouli poloměru R, když deformace je způsobena pouze jejím vlastním gravitačním polem.

Příklad: 11 Magdeburgské koule

Vypočtěte napětí v tenké kulové skořepině (s vnitřním poloměrem $R - \Delta R/2$ a vnějším poloměrem $R + \Delta R/2$, přitom $\Delta R \ll R$), s nulovým tlakem uvnitř a tlakem p zevně.



Obrázek 3: Setrvačník v gravitačním poli

6. Tekutiny

Příklad: 12 Zrcadlo

Určete tvar povrchu nestlačitelné kapaliny ve válcové nádobě, rotující kolem své osy konstantní úhlovou rychlostí Ω.

Příklad: 13 Válcové souřadnice

Rozepište ve válcových souřadnicích do složek Navierovu – Stokesovu rovnici pro nestlačitelnou tekutinu:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\varrho}\nabla p + \nu \Delta \boldsymbol{v}$$

Příklad: 14 Rychlost zvuku

Jaký je rozdíl v rychlosti zvuku ve vzduchu, chápeme-li proces jako isotermický nebo adiabatický? Který popis je správný a proč?

Volně upraveno dle textu od prof. M. Lence.