Soustavy lineárních rovnic

$Ax = b$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

metody řešení
- přímé
- iterační – každý krok sníží $|Ax - b|$

Gaussova - Jordanova eliminace

Gaussova eliminace

LU rozklad

Choleského rozklad

Gaussova - Jordanova eliminace

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

ekviv. úpravy
- násobení řádku $\neq 0$ číslem
- přičtení řádku k jinému

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \times \; -\frac{a_{21}}{a_{11}}$$

$$-a_{21} \quad -\frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} \quad \cdots \quad -\frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1N} \qquad -\frac{a_{21}}{a_{11}} b_1$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a'_{22} & \\ 0 & & \ddots \; a'_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_N \end{pmatrix} \rightarrow \quad x_i = \frac{b'_i}{a'_{ii}} \qquad i = 1 \ldots N$$

Gaussove eliminace

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ & a'_{22} & \cdots & a'_{2N} \\ & \emptyset & \ddots & \vdots \\ & & 0 & a'_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_N \end{pmatrix} \rightarrow a'_{NN} x_N = b'_N \rightarrow x_N$$

$$a'_{N-1\,N-1} x_{N-1} + a'_{N-1,N} x_N = b'_{N-1}$$

zpětná substituce

$$x_i = \frac{1}{a'_{ii}} \left(b'_i - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_j \right) \qquad i = N, N-1, \cdots 1$$

počet operací

GJ $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} N(N-i) \approx \frac{1}{2} N^3$ operací $*$ $+$

G $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} (N-i)^2 \approx \frac{1}{3} N^3$ $\qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{N} (N-i)^2 \approx \int_0^N (N-x)^2 dx = \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^N$

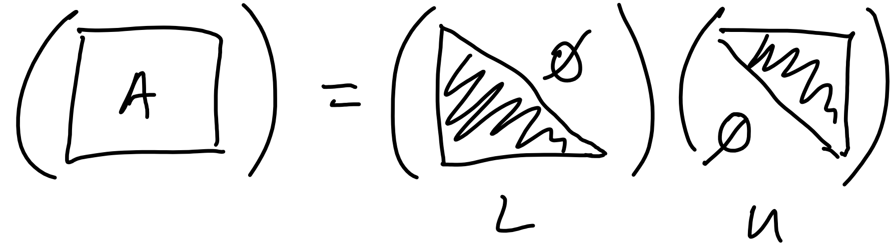
zpětná subst. $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} (N-i) = \frac{1}{2} N^2$

pivotizace – výběr prvku s největší abs. hodnotou k dělení

• LU rozklad

$A = LU$ ← horní trojúhelníková

↗ dolní trojúhelníková



$$L\underbrace{(Ux)}_{y} = b$$

$$Ly = b \xrightarrow{\text{zpětná subst.}} y$$

$$Ux = y \xrightarrow{\text{zpětná subst.}} x$$

4.2 Epidemie moru

epidemiologické modely

susceptible ↓ infected ↙ recovered ←

SIR

SIS

SI

z ... zdraví

n ... nemocní

$$\frac{dz}{dt} = -\beta n z \qquad \beta = 0{,}0177\ /\text{měsíc}$$

$$\frac{dn}{dt} = +\beta n z - \alpha n \qquad \alpha = 2.82\ /\text{měsíc}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta n z \\ +\beta n z - \alpha n \end{pmatrix}$$

$z(0) = 254$

$n(0) = 7$

fun(t, x) $\quad x = \begin{pmatrix} z \\ n \end{pmatrix}$ $\quad z = x[0]$, $n = x[1]$ $\xrightarrow{\text{fun}}$ $[-\beta n z,\ \beta n z - \alpha n]$