GRUPY A PERMUTACE

Příklad $GL(n,\mathbb{R}) = \{ A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R});$ existuje $A^{-1}\}$ Na této množině uvažujme operaci násobení matic

$$\cdot : GL(n,\mathbb{R}) \times GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$$

Toto násobení má následující vlastnosti

(1) je asociativní $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot (B\cdot C)$

(2) má jednotkový prvek $A\cdot E = E\cdot A = A$

(3) ke každému prvku existuje inverzní prvek

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E.$$

Definice grupy Grupa je neprázdná množina G s operací $\bullet : G \times G \to G$, která má vlastnosti:

(1) je asociativní $\forall g, h, k \in G \quad (g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$

(2) má jednotkový (neutrální) prvek e, pro který platí

$$\forall g \in G \quad g \cdot e = e \cdot g = g$$

(3) ke každému $g \in G$ existuje inverzní prvek $g^{-1} \in G$

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$$

Je-li navíc operace komutativní, tj. $g \cdot h = h \cdot g$, mluvíme o komutativní grupě (Abelovské grupě)

Další příklady:

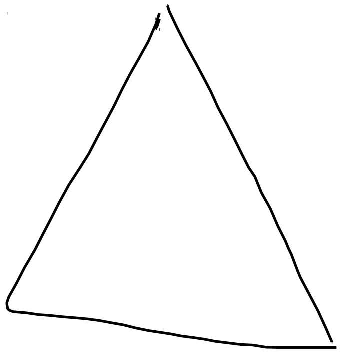
(2) $GL(1,\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ s operací násobení
je abelovská grupa

(3) $(\mathbb{Z}, +)$ je abelovská grupa
neutrální prvek je $0 \in \mathbb{Z}$
inverzní prvek k $n \in \mathbb{Z}$ je $-n \in \mathbb{Z}$

(4) U vektorový prostor a $+ : U \times U \to U$ je sčítání vektorů
je abelovská grupa
neutrální prvek je $\vec{0}$
inverzní prvek k $u \in U$ je $-u \in U$.

(5) $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ s operací násobení $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$
je abelovská grupa

6 Uvažujme rovnostranný trojúhelník v rovině

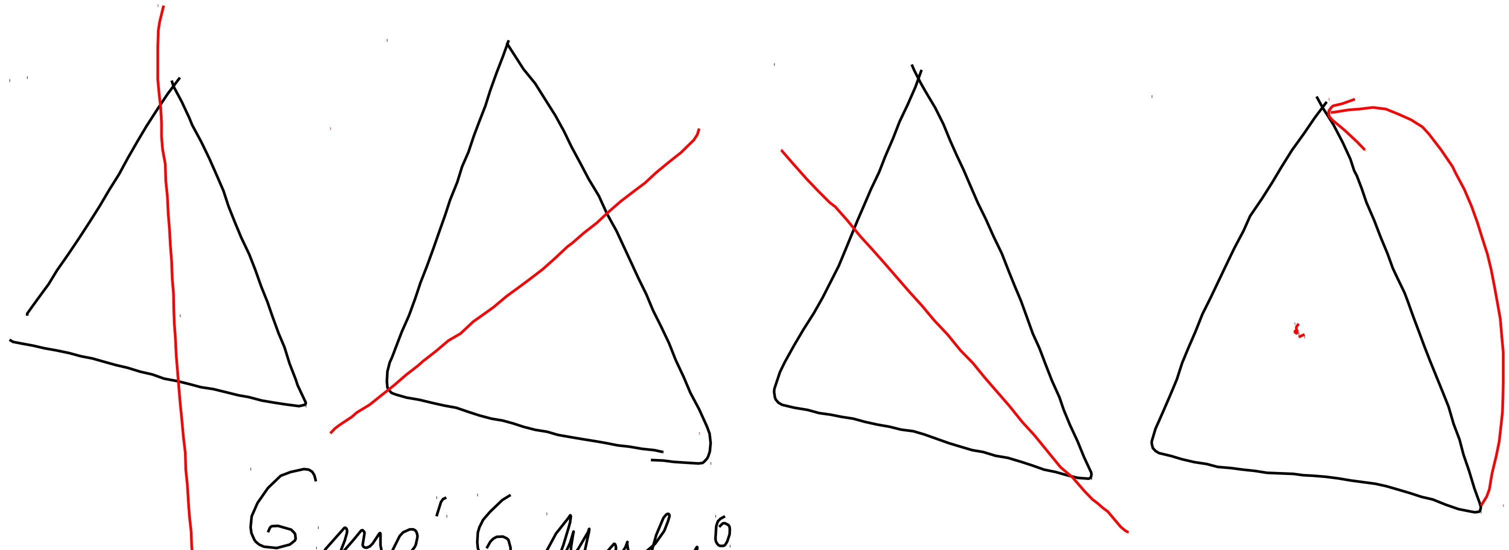


G množina jeho shodností

s operací skládání

je grupa

- skládání zobrazení je asociativní
- identita je jednotkový prvek
- ke každé shodnosti existuje inverze, která je taky shodnost



G má 6 prvků.

7 Krychle v $\mathbb{R}^3$: G je množina symetrií tělesa krychle s operací skládání. To je opět grupa

PERMUTACE

Uvažujme množinu $\{1,2,3,\dots,n\}$. Permutace této množiny je bijektivní zobrazení této množiny do sebe sama.

$$\tau : \{1,2,\dots n\} \xrightarrow{\cong} \{1,2,\dots n\}$$

Můžeme zapsat pomocí tabulky

i	1	2	3	4	$\dots$	n
$\tau(i)$	$\tau(1)$	$\tau(2)$	$\tau(3)$	$\tau(4)$	$\dots$	$\tau(n)$

$\longleftrightarrow$ pořadí $\tau(1)\ \tau(2) \dots \tau(n)$ čísel $1,2,\dots n$.

⑥

S_n = množina všech permutací množiny $\{1,2,\dots,n\}$

Na této množině uvažujme operaci skládání zobrazení:

$$\circ : S_n \times S_n \longrightarrow S_n$$

S_6

$$\tau \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Skládání permutací je asociativní.

$$\sigma \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Neutrální (jednotkový) prvek je

$$id : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & & n \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \tau \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Inverzní permutace

$$\tau : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \tau^{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Skládání permutací není komutativní

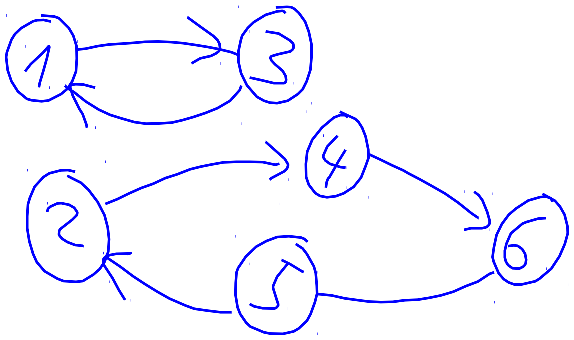
τ a σ z příkladu z předchozí tabule

$$\tau \circ \sigma : \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ 2 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\sigma \circ \tau \quad \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ 6 & \cdots \end{pmatrix}$$

Permutace lze znázornit pomocí obrázku



Homomorfismus grup

Nechť $(G,\cdot)$ a $(H,\circ)$ jsou grupy. Zobrazení

$$f : G \longrightarrow H$$

se nazývá homomorfismus grup, jestliže

$$\forall g_1, g_2 \in G : \quad f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \circ f(g_2)$$

Další odvozené vlastnosti homomorfismu jsou tyto:

- pro jednotkový prvek $e \in G$ je $f(e)$ jednotkový prvek v H.
- pro každé $g \in G$ je $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$

(9)

<u>Dokaz:</u> $\forall g \in G$ je

$$g \cdot e = g$$

$$f(g \cdot e) = f(g)$$

$$f(g) \circ f(e) = f(g) \qquad \Big/ \text{ aplikujemo } f(g)^{-1} \text{ slijeva}$$

$$f(g)^{-1} \circ \left(f(g) \circ f(e)\right) = f(g)^{-1} \circ f(g)$$

$$\left(f(g)^{-1} \circ f(g)\right) \circ f(e) = e_H$$

$$e_H \circ f(e) = e_H$$

$$f(e) = e_H$$

(2)

$$g \cdot g^{-1} = e$$

$$f(g \cdot g^{-1}) = f(e)$$

$$f(g) \circ f(g^{-1}) = e_H = f(g) \circ f(g)^{-1}$$

Vyjádříme $f(g)^{-1}$ zleva:

$$f(g)^{-1}\circ\left(f(g)\circ f(g^{-1})\right) = f(g)^{-1}\circ\left(f(g)\circ f(g)^{-1}\right)$$

$$\underbrace{\left(f(g)^{-1}\circ f(g)\right)}_{e_H}\circ f(g^{-1}) = \underbrace{\left(f(g)^{-1}\circ f(g)\right)}_{e_H}\circ f(g)^{-1}$$

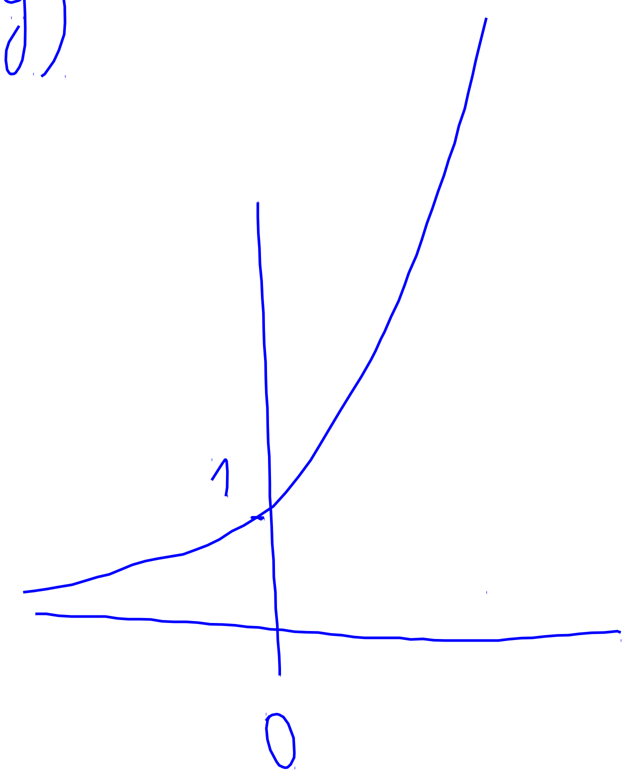
$$e_H\circ f(g^{-1}) = e_H\circ f(g)^{-1}$$

$$f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$$

Příklady homomorfismů

1) $(\mathbb{R},+)=G$, $H=(\mathbb{R}^+,\cdot)$

$f(x)=e^x$ $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$



f je homomorfismus neboť

$$f(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y)$$

operace v $\mathbb{R}$ — operace v $\mathbb{R}^+$

$(\mathbb{R},+)$ neutrální prvek je 0

$(\mathbb{R}^+,\cdot)$ neutrální prvek je 1

$$f(0) = e^0 = 1$$

$(\mathbb{R},+)$ inv. prvek k x je $-x$

$(\mathbb{R}^+,\cdot)$ inv. prvek k y je y^{-1}

$$f(-x) = e^{-x} = (e^x)^{-1}$$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ je prostá a na.

Inv. zobrazení $\ln: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ je rovněž homomorfismus grup

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

(12)

Příklad: G … matice 2×2 s $a_{21}=0$ (horní trojúhelníkové) s operací násobení matic a $a_{11}\cdot a_{22}\neq 0$

$H=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ s operací násobení

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

G je grupa

$$f: G \longrightarrow H$$

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}$$

(13)

f je homomorfismus

$$f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \ldots\ldots \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}b_{11}\,a_{22}b_{22} = (a_{11}a_{22}) \cdot (b_{11}b_{22}) =$$

$$= f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \cdot f\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

Znaménko permutace

Nechť τ je permutace množiny $\{1, 2, \ldots n\}$

Potom číslo $\operatorname{sign} \tau = \prod_{1 \le j < i \le n} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j}$

je rovno $+1$ nebo -1.

(14)

$$\tau \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{matrix}$$

$$\operatorname{sign} \tau = \frac{2-3}{2-1} \cdot \frac{4-3}{3-1} \cdot \frac{1-3}{4-1} \cdot \frac{4-2}{3-2} \cdot \frac{1-2}{4-2} \cdot \frac{1-4}{4-3}$$

$$= (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)(-1)\cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Věta: Zobrazení sign: $S_n \longrightarrow \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ má tuto vlastnost

$$\operatorname{sign}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sign}\sigma \cdot \operatorname{sign}\tau$$

Tedy sign je homomorfismus grup S_n a $\mathbb{Z}_2$.

15

Důkaz:

$$\operatorname{sign}(\sigma \circ \tau) = \prod_{i>j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{i-j}$$

$$\operatorname{sign}\sigma \cdot \operatorname{sign}\tau = \prod_{k>l} \frac{\sigma(k)-\sigma(l)}{k-l} \cdot \prod_{i>j} \frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j}$$

$$= \prod_{i>j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\cancel{\tau(i) - \tau(j)}} \cdot \prod_{i>j} \frac{\cancel{\tau(i)-\tau(j)}}{i-j}$$

$$= \prod_{i>j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{i-j} = \operatorname{sign}(\sigma\circ\tau)$$

Praktický výpočet znaménka permutace

Mějme permutaci τ, inverze této permutace je každá dvojice (j,i) taková, že

$$j < i, \quad \text{ale} \quad \tau(j) > \tau(i)$$

τ					
1	2	3	4	5	6
5	6	1	3	2	4

$$\boxed{\operatorname{sign} \tau = (-1)^{\text{počet inverzí}}}$$

$\frac{1\,3}{5\,1}$ 14 15 16
53 52 54

23 24 25 26
61 63 62 64

45
32

$\operatorname{sign} \tau = (-1)^9 = -1$

Počet inverzí = počet záporných sloupců v definici znaménka

17

$$\tau \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

počet inverzí je $n-1+n-2+\dots+1+0=$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

znaménko je $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$n = 4k \qquad \operatorname{sign} \tau = \underline{1}$

$n = 4k+1 \qquad \operatorname{sign} \tau = \underline{1}$

$n = 4k+2 \qquad \operatorname{sign} \tau = -1$

$n = 4k+3 \qquad \operatorname{sign} \tau = -1$

DEFINICE DETERMINANTU

Každé čtvercové matici A lze přiřadit číslo, které nazýváme determinantem matice A. Jeho význam spočívá v tom, že nám říká zda má A inverzní matici. Dokážeme níže

$$A^{-1} \text{ existuje} \iff \det A \neq 0$$

Toto číslo má i geometrický význam, říká tzv. orientovaný objem.

Definice Nechť $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Potom

$$\det A = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)}$$

kde $A = (a_{ij})$.

S_n má $n!$ permutací.

Výpočet pro malé n

$n = 1 \quad A = (a_{11}) \quad \det A = a_{11}$

$n = 2 \quad \tau = (1\,2), (2\,1)$

$$\det A = \operatorname{sign}(1\,2)\, a_{11} a_{22} + \operatorname{sign}(2\,1)\, a_{12} a_{21}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ \\ + \end{matrix}$$

$\underline{n = 3}$ tu máme $3! = 6$

permutácií $\quad \tau = (1,2,3),\ (1\,3\,2),\ (3\,1\,2),\ (3\,2\,1),$
$\quad (2\,3\,1),\ (2\,1\,3)$

$$\det A = \overset{+1}{\operatorname{sign}}(123)\, a_{11}a_{22}a_{33} + \overset{-1}{\operatorname{sign}}(132)\, a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$+ \overset{+1}{\operatorname{sign}}(312)\, a_{13}a_{21}a_{32} + \overset{-1}{\operatorname{sign}}(321)\, a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$+ \overset{+1}{\operatorname{sign}}(231)\, a_{12}a_{23}a_{31} + \overset{-1}{\operatorname{sign}}(213)\, a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

znaménka $+$ | znaménka $-$

Výpočet det matice 3×3 podle tohoto pravidla se nazývá Sarrusovo pravidlo

Pro matice $n\times n$ pro $n\geq 4$ neplatí! Pozor!