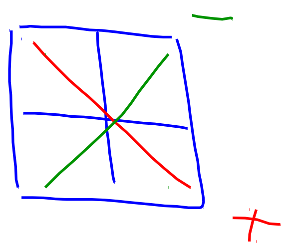
DETERMINANTY

A je matice $n \times n$ nad $\mathbb{K}$

$$\det A = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)}$$

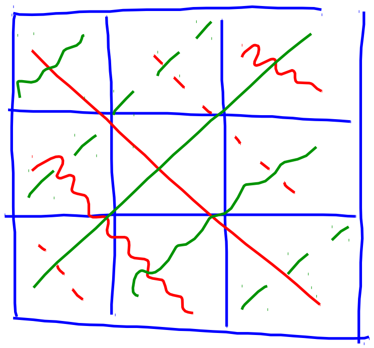
Sčítanců je $n!$

matice 2×2 $\quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$



2

$n = 3$



6 sčítanců

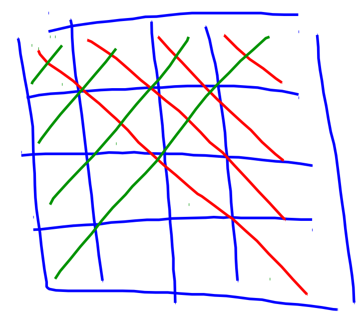
3 se znaménkem +

3 se znaménkem −

Způsob výpočtu pomocí diagonál se nazývá Saarusovo pravidlo – platí pro $n = 2$ a 3.

Pro $n = 4$ již neplatí

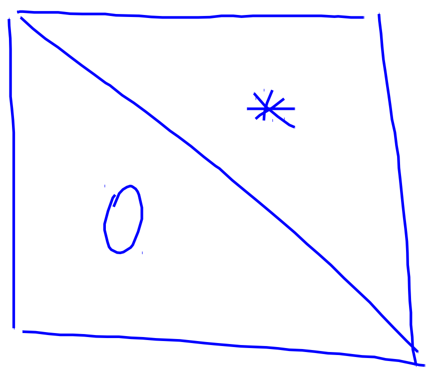
$4! = 24$ ale uhlopříček je 8



Výpočet determinantu pro horní trojúhelníkovou matici

A typu $n \times n$

$A = (a_{ij})$ $\quad a_{ij} = 0$ pro $i > j$



$$\det A = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$$

Důkaz: Ukážeme, že všechny další sčítance v definici obsahují nějaké a_{ij} kde $i > j$.

V sčítanci se musí vyskytovat činitel $a_{n\tau(n)}$. Pro $\tau(n) < n$ je $a_{n\tau(n)} = 0$. Proto musí být $\tau(n) = n$.

4

$$\det A = \sum \operatorname{sign} \tau \; a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n-1\,\tau(n-1)} a_{n\,\tau(n)}$$

$\tau(n) < n \implies a_{n\,\tau(n)} = 0$

Nechť $\tau(n) = n$

$\tau(n-1) < n-1 \implies a_{n-1\,\tau(n-1)} = 0$

$\tau(n-1) \neq n = \tau(n)$

Proto $\tau(n-1) = n-1$

$\tau(n-2) < n-2 \implies a_{n-2\,\tau(n-2)} = 0$

$\tau(n-2) \neq \tau(n) = n$

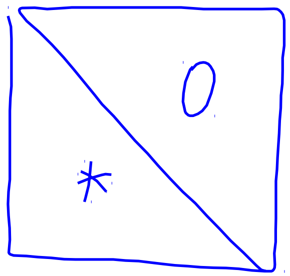
$\neq \tau(n-1) = n-1$

Proto $\tau(n-2) = n-2$ atd

Jediný případně nenulový součin je

$a_{11} a_{22} \cdots a_{n-1\,n-1} a_{nn}$

Determinant dolní trojúhelníkové matice A



je rovněž

$$\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

Bude nás nejdřív zajímat, jak se chová determinant při provádění elementárních řádkových operací.

Základní pravidla pro počítání s det

(1) Nechť B vznikne z A výměnou i-tého a j-tého řádku ($i \neq j$). Pak

$$\det B = -\det A.$$

Důkaz: Pro jednoduchost uvažujme $i=1,\ j=2$.

$A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$

$b_{1j}=a_{2j}$ $\quad b_{2j}=a_{1j}$

$b_{ij}=a_{ij}$ $\quad i\geq 3$

$$\det B=\sum_{\tau\in S_n}\operatorname{sign}\tau\ b_{1\tau(1)}b_{2\tau(2)}b_{3\tau(3)}\cdots b_{n\tau(n)}$$

$$=\sum_{\tau\in S_n}\operatorname{sign}\tau\ a_{2\tau(1)}a_{1\tau(2)}a_{3\tau(3)}\cdots a_{n\tau(n)}$$

$$=\sum_{\tau\in S_n}\operatorname{sign}\tau\ a_{1\tau(2)}a_{2\tau(1)}a_{3\tau(3)}\cdots a_{n\tau(n)}$$

7

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \tau(2) & \tau(1) & \tau(3) & & \tau(n) \end{matrix}}$$

Taková permutace vznikla složením tzv. transpozice

$$\sigma = \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & \dots & n \end{matrix}} \quad a \quad \tau$$

$$\| \qquad \tau \circ \sigma$$

$$\det B = \dots\dots = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; a_{1\tau\sigma(1)} a_{2\tau\sigma(2)} a_{3\tau(\sigma 3)} \dots a_{n\tau\sigma(n)} =$$

jestliže τ probíhá všechny permutace, tak $\tau\sigma$ rovněž probíhá všechny permutace

$$\operatorname{sign}(\tau\sigma) = \operatorname{sign}\tau \cdot \operatorname{sign}\sigma = -\operatorname{sign}\tau$$

$$= \sum_{\tau\sigma \in S_n} (-1) \operatorname{sign}(\tau \circ \sigma)\, a_{1\tau\sigma(1)} a_{2\tau\sigma(2)} \dots a_{n\tau\sigma(n)} =$$

$$= (-1) \left(\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \; a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)} \right) = -\det A$$

2 Nechť matice A má dva stejné řádky. Pak
$$\det A = 0.$$

Důkaz: Přehozením stejných řádků vznikne matice $B = A$. Z předchozího víme, že

$$\det B = -\det A$$
$$\det A = -\det A$$
$$2 \det A = 0 \qquad \text{nad } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ nebo } \mathbb{C}$$
$$\det A = 0.$$

3 Jestliže matice B vznikne z A vynásobením i-tého řádku číslem c, pak
$$\det B = c \det A.$$

(9)

Důkaz: 1. řádek vynásobíme číslem c

$$\det B = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)} =$$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; c \cdot a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} =$$

$$= c \left(\sum \operatorname{sign} \tau \; a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} \right) = c \det A.$$

(4) Nechť se matice A a B liší pouze v i-tém řádku. Nechť C je matice taková, že

j-tý řádek $r_j(C) = r_j(A) = r_j(B)$ pro $j \neq i$

$$r_i(C) = r_i(A) + r_i(B)$$

Pak

$$\det C = \det A + \det B$$

Důkaz: Nechť $i=1$

$$\det C = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; c_{1\tau(1)} c_{2\tau(2)} \cdots c_{n\tau(n)} =$$

$$= \sum \operatorname{sign} \tau \left(a_{1\tau(1)} + b_{1\tau(1)} \right) c_{2\tau(2)} \cdots c_{n\tau(n)} =$$

$$= \sum \operatorname{sign} \tau \; a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)}$$

$$+ \sum \operatorname{sign} \tau \; b_{1\tau(1)} b_{2\tau(2)} \cdots b_{n\tau(n)} = \det A + \det B.$$

5 Nechť C vznikne z A tak, že k i-tému řádku přičteme c-násobek j-tého řádku ($j \neq i$). Pak

$$\det C = \det A.$$

Důkaz: Plyne z 4. Vezmeme matici B, která je stejná jako A, pouze v i-tém řádku má c-násobek j-tého řádku

$$B = \begin{array}{c} i \longrightarrow \\ \\ j \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} c a_{j1} \; c a_{j2} \; \dots \\ \\ a_{j1} \; a_{j2} \; \dots \end{array}$$

Potom matice C vznikne způsobem popsaným ve 4

Proto $\det C = \det A + \det B = \det A + c \det$ matice se dvěma stejnými řádky $= \det A + c \cdot 0$

$= \det A$.

$\tau(i) = 1$

$i \quad \tau^{-1}(1) = i$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & & \tau(n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \\ 1 & 2 & & n \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau^{-1}(1) & \tau^{-1}(2) & & \tau^{-1}(n) \end{pmatrix}$$

6 $\det A^T = \det A$

Důkaz. $A^T = (b_{ij}) \qquad A = (a_{ij})$

$$\det A^T = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; b_{1\tau(1)} b_{2\tau(2)} \dots b_{n\tau(n)}$$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \dots a_{\tau(n)n}$$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau \; a_{1\tau^{-1}(1)} a_{2\tau^{-1}(2)} \dots a_{n\tau^{-1}(n)}$$

τ^{-1} probíhá všechny prvky v S_n $\qquad \operatorname{sign} id = 1 = \operatorname{sign} \tau \cdot \operatorname{sign} \tau^{-1}$

$\operatorname{sign} \tau^{-1} = \operatorname{sign} \tau$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau^{-1} \; a_{1\tau^{-1}(1)} \dots a_{n\tau^{-1}(n)} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \; a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)} = \det A$$

7 Pravidla 1 – 5 platí i v případě, že řádky nahradíme sloupci.

To je proto, že sloupec v A je řádek v A^T a platí $\det A^T = \det A$.

Příklad 1

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}}_{n \times n} =$$

Z 1. řádku odečteme vždy ostatní řádky, det se nezmění 5

$$= \det \begin{pmatrix} a+n-1 & a+n-1 & a+n-1 & \cdots & a+n-1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

3

$$= (a+n-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & & a \end{pmatrix} =$$

od 2, 3, … n. tého řádku odečteme 1. řádek =

15

$$= (a+n-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & a-1 \end{pmatrix} = (a+n-1) \cdot 1 (a-1)(a-1)\cdots(a-1)$$

$$= (a+n-1)(a-1)^{n-1}$$

Příklad 2 Vandermondův determinant

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \det V(x_1, x_2, \dots x_n)$$

od 2., 3., ... n. ř. odečteme 1. řádek

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \dots & & & & & \\ 0 & x_n - x_1 & \dots & & & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

$$x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2)$$

$$x_2^{n-1} - x_1^{n-1} = (x_2 - x_1)(x_2^{n-2} + x_2^{n-3} x_1 + \dots + x_n^{n-2})$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 & \dots \\ & & & & \\ 0 & 1 & x_n + x_1 & x_n^2 + x_n x_1 + x_1^2 & \dots \end{pmatrix}$$

$$V(x_2, x_3, \dots x_n)$$

Budeme se snažit upravit matici pomocí sloupcových úprav na $V(x_2, x_3, \dots x_n)$

Použijme přitom následující (bude dokázáno později)

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array} = \det A \cdot \det C$$

$$\begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{k} & \underbrace{\qquad}_{n-k} \end{array}$$

Pokračování výpočtu

$$= (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \det \boxed{1} \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 & \cdots \\ 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_3 x_1 + x_1^2 & \\ \cdots & & & \\ 1 & x_n + x_1 & x_n^2 + x_n x_1 + x_1^2 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)\det\begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-2} \\ - & - & - & - & - \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

Od $(n-1)$. sloupce odečteme x_1 násobek $(n-2)$. sloupce.

Od $(n-2)$. sloupce odečteme x_1 násobek $(n-3)$. sloupce

atd až od 2. sloupce

odečteme x_1 násobek 1. sloupce

$$= (x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)\det V(x_2,\dots,x_n) = (x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)$$

$$\det V(x_3,\dots,x_n) = \prod_{i>j}(x_i-x_j)\det V(x_n) = \prod_{i>j}(x_i-x_j)$$

$\det \boxed{1}$

Věta:

$$\det \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} \;k\; & \;n-k\; \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \}\,k \\ \}\,n-k \\ \end{array} = \det A \cdot \det C$$

Důkaz: Označme celou matici jako D.

Platí, že $D = (d_{ij})$ $\quad d_{ij} = 0$ pro $k+1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$

$$\det D = \det \sum_{\sigma} \operatorname{sign} \sigma \; d_{1\sigma(1)} \cdots d_{n\sigma(n)}$$

Jak vypadají permutace pro které

musí $\quad k+1 \leq i \leq n \Rightarrow \sigma(i) \notin \{1,2,\dots,k\}$

tj. $\quad k+1 \leq i \leq n \Rightarrow \sigma(i) \in \{k+1,k+2,\dots,n\}$

a proto i $\quad 1 \leq i \leq k \Rightarrow \sigma(i) \in \{1,2,\dots,k\}$

20

$$\det D = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; d_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot d_{n\sigma(n)}$$

$$\sigma(\{1,2,\ldots k\}) = \{1,2,\ldots,k\}$$

$$\sigma\{k+1,\ldots n\} = \{k+1,\ldots,n\}$$

$$\begin{array}{c|c|c}
 & & 1 \;\ldots\ldots\; n-k \\
 & 1 \quad\quad k & k+1 \quad\quad n \\
\sigma & \sigma(1) \quad \sigma(k) & \sigma(k+1) \;\ldots \\
 & \tau & \sigma(k+1)-k \;\ldots\; \sigma(n)-k
\end{array}$$

$$\tau \in S_k \qquad \tau(i) = \sigma(i)$$

$$\pi \in S_{n-k} \qquad \pi(j) = \sigma(k+j)-k$$

$$= \sum_{\tau, \pi} \operatorname{sign}\tau \cdot \operatorname{sign}\pi \; a_{1\tau(1)} \cdots a_{k\tau(k)} \, c_{1\pi(1)} \cdots c_{n-k\,\pi(n-k)}$$

$$= \left(\sum_{\tau} \operatorname{sign}\tau \; a_{1\tau(1)} \cdots a_{k\tau(k)} \right) \left(\sum_{\pi} \operatorname{sign}\pi \; c_{1\pi(1)} \cdots c_{n-k\,\pi(n-k)} \right)$$

$$= \det A \cdot \det C .$$

Příště bude důkaz tzv. Cauchyovy věty

CAUCHYOVA VĚTA

$$\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Minule jsme mluvili o homomorfismech grup.

$f : G \longrightarrow H$ je homomorfismus, jestliže

$$f(g_1\cdot g_2) = f(g_1)\cdot f(g_2)$$

Cauchyova věta nám říká, že zobrazení

$$\det : \underbrace{\{\text{matice } n\times n \text{ s inv. maticí}\}}_{GL(n,\mathbb{K})} \longrightarrow (\mathbb{K}\setminus\{0\}, \cdot)$$

je homomorfismus grup.